WANDA APARECIDA LOPES

O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2009

WANDA APARECIDA LOPES

O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L864t Lopes, Wanda Aparecida, 1975-

O teorema de Stone-Weierstrass e aplicações / Wanda Aparecida Lopes. - 2009.

69 f.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui bibliografia.

1. Análise funcional - Teses. 2. Teoria da aproximação - Teses. 3. Funções contínuas - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 517.98

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Wanda Aparecida Lopes.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 86190.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações .

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 6 de fevereiro de 2009, às 10:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - UFU	
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPb	
Prof. Dra. Ana Carla Piantella - UFU	Ana Carla Piantella

Uberlândia, 6 de fevereiro de 2009.

Dedicatória

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida, aos meus irmãos, Walter, Valdo e Vandeir, à minhas irmãs Marly e Neri, à minha mãe, que sempre me incentivou a dar prioridade aos estudos, à todos os meus sobrinhos e sobrinhas, e em especial ao meu namorado Bruno, com amor, que por muitas e valiosas vezes foi muito além de um namorado.

Ao meu pai João (in memorian).

Agradecimentos

A gratidão é incomensurável, e registrá-la aqui, nada mais é do que uma tentativa de expressá-la.

A Deus, pela vida, por todas as oportunidades dadas e por ter me concedido vontade no início, otimismo e perseverança durante e realização ao término deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho pela ajuda na escolha do tema desse trabalho, pelos ensinamentos, pelo respeito, pela paciência, pela compreensão e pela boa vontade; sendo assim, um dos grandes responsáveis por esta conquista.

Aos professores Daniel Marinho Pellegrino e Ana Carla Piantella por terem aceito o convite para participarem da banca examinadora e, de mesma forma, agradeço aos professores suplentes Vinícius Vieira Fávaro e Jaime Alves Barbosa Sobrinho.

Aos docentes do Programa de Mestrado-FAMAT que muito contribuíram para a realização deste trabalho. Especialmente a Profa. Rosana Jafelice, pela motivação e incentivo a prosseguir e persistir meus estudos em pós-graduação.

Aos funcionários da FAMAT pelo apoio e incentivo.

Ao querido Bruno, que compartilhou comigo as alegrias e dificuldades desta jornada, quero que ele saiba que palavras são poucas, próximas de atos.

Aos meus colegas de pós-graduação, Daniel, Carolina, Juliana, Paulo e Willian, vocês sabem o quanto eu caminhei para chegar até aqui, obrigada pela contribuição em meu aprendizado, e pela amizade que demonstraram por mim.

Aos colegas de trabalho, por terem me ouvido com paciência, nas horas difíceis, a importância de vocês ao longo desta caminhada está marcada e sempre será lembrada.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho, deixo aqui a certeza de que a vitória não é tão somente minha. Muito Obrigada!

Eu sigo o caminho e por isso o sonho continua!

Lopes, W. A. *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações.* 2009. 58 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O objetivo desta dissertação é demonstrar e aplicar o Teorema da Aproximação de Weierstrass, sobre aproximação de funções contínuas em intervalos fechados e limitados da reta por polinômios, e o Teorema de Stone-Weierstrass, sobre aproximação de funções contínuas definidas em espaços topológicos compactos. Como aplicações do Teorema da Aproximação de Weierstrass tratamos o problema dos momentos de uma função contínua e a aproximação de funções contínuas definidas na reta por funções infinitamente diferenciáveis. Como aplicações do Teorema de Stone-Weierstrass provamos que o espaço $C(K)$ das funções contínuas no compacto K é separável se e somente se K é metrizável e também a existência de um compacto K tal que $C(K)$ é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ_∞ das sequências limitadas.

Palavras-chave: aproximação, funções contínuas, funções infinitamente diferenciáveis, espaços compactos, espaços separáveis, espaços metrizáveis.

Lopes, W. A. *The Stone-Weierstrass Theorem and Applications.* 2009. 58 p. M.Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The aim of this dissertation is to prove and apply the Weierstrass Approximation Theorem, on the approximation of continuous functions on bounded closed intervals by polynomials, and the Stone-Weierstrass Theorem, on the approximation of continuous functions on compact topological spaces. As applications of the Weierstrass Approximation Theorem we deal with the momentum problem for continuous functions and the approximation of continuous functions on the line by infinitely differentiable functions. As applications of the Stone-Weierstrass Theorem we prove that the space $C(K)$ of continuous functions on the compact K is separable if and only if K is metrizable and the existence of a compact space K such that $C(K)$ is isometrically isomorphic to the space ℓ_∞ of bounded sequences.

Key-words: approximation, continuous functions, infinitely differentiable functions, compact spaces, metrizable spaces, separable spaces.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar demonstrações e aplicações de dois teoremas centrais da Análise Matemática, a saber: (i) o Teorema da Aproximação de Weierstrass, que foi provado pela primeira vez por Karl Weierstrass em 1885 e que estabelece que toda função contínua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios; (ii) o Teorema de Stone-Weierstrass, demonstrado pela primeira vez por Marshall H. Stone em 1937 (veja [24]), que reconheceu que o intervalo $[a,b]$ da reta poderia ser substituido por espaços mais gerais substituindo também os polinômios por funções adequadas. Mais precisamente, Stone provou que funções contínuas definidas em espaços topológicos compactos de Hausdorff podem ser uniformemente aproximadas por funções que pertençam a uma sub-álgebra do espaço de todas as funções contínuas que separam pontos e contém as funções constantes. Estes dois teoremas, além de terem um sem número de aplicações, deram origem, dentro da área conhecida como Teoria da Aproximação, a toda uma linha de pesquisa que, até hoje, busca variações e generalizações dos mesmos.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentaremos duas demonstrações do Teorema da Aproximação de Weierstrass, a primeira usando os polinômios de Bernstein e a segunda usando polinômios trigonométricos. As duas demonstrações têm interesse próprio, pois ao usarmos os polinômios de Bernstein daremos uma demonstração mais simples usando polinômios mais complicados, ao passo que com polinômios trigonométricos daremos uma demonstração mais elaborada mas que resulta em aproximações por polinômios mais simples.

O objetivo do Capítulo 2 é apresentar e demonstrar o Teorema de Stone-Weierstrass sobre aproximação de funções contínuas definidas em espaços topológicos compactos de Hausdorff. É claro que nesse contexto mais abstrato não faz sentido falar em polinômios, por isso uma questão que precede é a identificação de quais funções farão o papel dos polinômios, isto é, quais funções servirão para aproximar funções contínuas arbitrárias. Apresentaremos neste capítulo a solução que Marshall H. Stone deu para esse problema, na qual o papel dos polinômios é desempenhado por funções que pertençam a uma sub-álgebra do espaço de todas as funções contínuas que separam os pontos do domínio e contém as funções constantes. Além da demonstração do Teorema de Stone, faremos também uma discussão sobre suas hipóteses. Demonstraremos primeiro o Teorema de Stone-Weierstrass no caso real e em seguida usaremos o caso real para obter o caso complexo.

No Capítulo 3 apresentaremos aplicações do Teorema da Aproximação de Weierstrass e do Teorema de Stone-Weierstrass. Como primeira aplicação do Teorema da Aproximação de Weierstrass provaremos o interessante resultado que garante que, se duas funções contínuas $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ têm os mesmos momentos, isto é,

$$\int_a^b x^n f(x)dx = \int_a^b x^n g(x)dx,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então f e g são iguais. Em seguida, usaremos o mesmo teorema para demonstrar que toda função contínua $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções infinitamente diferenciáveis em toda a reta.

A primeira aplicação do Teorema de Stone-Weierstrass trata da separabilidade dos espaços de funções contínuas. Chamaremos de $C(K)$ o espaço de Banach das funções contínuas, definidas em um espaço topológico compacto Hausdorff K, com a norma do supremo. Primeiramente usaremos o Teorema da Aproximação de Weierstrass para provar que $C([a,b])$ é separável, o que levanta a hipótese de $C(K)$ ser separável para todo compacto de Hausdorff K. Em seguida ao provarmos que o espaço ℓ_∞ não é separável, essa hipótese não se confirma e então a questão passa a ser determinar para quais compactos de Hausdorff K é verdade que $C(K)$ é separável. Usaremos então o Teorema de Stone-Weierstrass para provar a seguinte caracterização dos compactos de Hausdorff K para os quais $C(K)$ é separável: dado uma espaço topológico compacto de Hausdorff K,

$$C(K) \text{ é separável se e somente se } K \text{ é metrizável.}$$

Finalizaremos a dissertação usando o Teorema de Stone-Weierstrass para demonstrar um resultado fundamental da teoria dos espaços de Banach, a saber, a existência de um compacto de Hausdorff K tal que o espaço $C(K)$ das funções contínuas definidas em K é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ_∞ das sequências limitadas. Em geral esse resultado é obtido como caso particular de teoremas muito mais profundos e difíceis da teoria de álgebras de operadores. Nosso objetivo é dar uma demonstração direta do resultado, usando o mínimo possível de pré-requisitos.

Capítulo 1

O Teorema da Aproximação de Weierstrass

Neste capítulo demonstraremos o Teorema de Weierstrass que diz que toda função contínua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios. Daremos duas demonstrações, a primeira usando os polinômios de Bernstein e a segunda os polinômios trigonométricos. As duas demonstrações têm interesse pois ao usarmos os polinômios de Bernstein damos uma demonstração mais simples usando polinômios mais complicados, e com polinômios trigonométricos damos uma demonstração mais complicada mas usando polinômios mais simples.

1.1 Uma demonstração usando polinômios de Bernstein

Esta seção é baseada em [10, Seção 10.2] e [22, Seção 6.1]. Recordemos que se n é um inteiro positivo e k é um inteiro tal que $0 \leq k \leq n$, então *o coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Seja $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. *O n-ésimo polinômio de Bernstein associado a f* é o polinômio $B_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 (Teorema da Aproximação de Weierstrass) *Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio $P\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.*

Demonstração. Como primeiro passo mostraremos que provando o teorema para o caso especial em que $a = 0$ e $b = 1$, este se generaliza para qualquer intervalo $[a,b]$. Suponhamos então que o teorema vale para funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$

e consideremos uma função contínua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $a < b$. Definimos uma nova função $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(a + (b-a)x).$$

Note que

$$g(0) = f(a) \quad \text{e} \quad g(1) = f(b).$$

Como g é uma função contínua em $[0,1]$, então existe um polinômio $Q\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|g(y) - Q(y)| < \varepsilon \text{ para todo } y \in [0,1].$$

Para $x \in [a,b]$, tomando $y = \dfrac{x-a}{b-a}$ temos que $y \in [0,1]$ e

$$g(y) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f\left(a + (b-a)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right) = f(x).$$

Então

$$\left| f(x) - Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Definindo $P\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$P(x) = Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

temos que P é um polinômio e está bem definido pois

$$P(a) = Q(0) \quad \text{e} \quad P(b) = Q(1).$$

Então

$$|f(x) - P(x)| = \left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Basta então provar o teorema para uma função contínua $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Para isso seja $\varepsilon > 0$. A estratégia é mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [0,1],$$

onde B_n é o n-ésimo polinômio de Bernstein associado a f. Para isso recordemos o teorema binomial: para $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1.2}$$

Derivando em relação a x obtemos

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}, \tag{1.3}$$

e multiplicando (1.3) por x temos que

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k}. \tag{1.4}$$

Derivando (1.3) novamente em relação a x segue que

$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k},$$

e multiplicando por x^2 em ambos os lados,

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k y^{n-k}. \tag{1.5}$$

Fazendo $y = 1 - x$ nas equações (1.2), (1.4) e (1.5) obtemos

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \tag{1.6}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{1.7}$$

e

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Segue então que

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \tag{1.8}$$

e portanto somando (1.7) e (1.8) teremos,

$$nx + n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1.9}$$

Expandindo $(k - nx)^2$ e usando (1.9), (1.7) e (1.6), nesta ordem teremos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad -2\sum_{k=0}^{n} nkx \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{n} n^2x^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= [nx + n(n-1)x^2] - 2nx \cdot nx + n^2x^2 \\
&= nx + n^2x^2 - nx^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\
&= nx(1-x).
\end{aligned}$$

Então
$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{1.10}$$
Como f é contínua e [0,1] é compacto, sabemos que:

1. f é limitada, isto é: existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1]$.
2. f é uniformemente contínua, e portanto existe $\delta > 0$ tal que
$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } x, \frac{k}{n} \in [0,1] \text{ e } \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta.$$

Prosseguindo,
$$\begin{aligned} f(x) - B_n(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\overset{(1.6)}{=} \sum_{k=0}^{n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$
Separando essa soma convenientemente em duas partes da forma
$$\begin{aligned} f(x) - B_n(x) &= \sum_{|k-nx|<\delta n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &+ \sum_{|k-nx|\geq\delta n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$
da desigualdade triangular segue que
$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \left|\sum_{|k-nx|<\delta n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\ &+ \left|\sum_{|k-nx|\geq\delta n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|. \end{aligned}$$
Para $|k-nx| < \delta n$ temos que $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e portanto $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, então
$$\begin{aligned} &\left|\sum_{|k-nx|<\delta n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\ &\leq \sum_{|k-nx|<\delta n}\left|\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\sum_{|k-nx|<\delta n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right] = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Para $|k-nx| \geq \delta n$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\qquad \leq \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\qquad \leq \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \left[|f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\qquad \leq 2M \left(\sum_{|k-nx|\geq \delta n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right). \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

Da igualdade (1.10) obtemos:

$$
\begin{aligned}
nx(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\geq \delta^2 n^2 \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2} \geq \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
$$

Substituindo em (1.11) obtemos

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| &\leq 2M \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2} \\
&= \frac{2Mx(1-x)}{\delta^2 n}.
\end{aligned}
$$

Como $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ para $x \in [0,1]$, e considerando n algum inteiro maior que $\frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$ temos que

$$
\frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} < \frac{2M}{\frac{4M\delta^2}{\varepsilon\delta^2}} = \frac{\varepsilon}{2}.
$$

Segue então que para $n > \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$

$$
\left| \sum_{|k-nx|\geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},
$$

e portanto

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{|k-nx|<\delta n} \left| \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left| \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$. □

Observação 1.2 Uma interpretação probabilística dos polinômios de Bernstein e de suas propriedades pode ser encontrada em [6, p. 166-167].

Vejamos a seguir como o Teorema da aproximação de Weierstrass pode ser estendido para funções contínuas a valores complexos.

Definição 1.3 Um polinômio complexo é uma função $P\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \text{ para todo } x \in [a, b],$$

onde $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ são os coeficientes de P.

É claro que todo polinômio complexo é um função contínua. Vejamos que, como no caso real, toda função contínua complexa pode ser aproximada por polinômios complexos:

Corolário 1.4 (Teorema da Aproximação de Weierstrass-Caso complexo) *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Então dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio complexo $P\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Chamemos de u e v as partes real e imaginária de f, isto é:

$$u\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R};\quad u(x) = \mathrm{Re}(f(x))$$

$$v\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R};\quad v(x) = \mathrm{Im}(f(x)),$$

onde Re e Im denotam as partes real e imaginárias, respectivamente.

Dessa forma $f = u + iv$. Como uma função complexa é contínua se, e somente se, suas partes real e imaginária são contínuas, temos que u e v são contínuas. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 1.1 existem polinômios

$$p\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n;\quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \text{ e}$$

$$q\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m;\quad b_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

tais que

$$|u(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |v(x) - q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Se $n \leq m$, definimos $P\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$P(x) = (a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1)x_1 + \cdots + (a_n + ib_n)x^n + ib_{n+1}x^{n+1} + \cdots + ib_m x^m;$$

e se $m \leq n$, definimos $P\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ por

$$P(x) = (a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1)x_1 + \cdots + (a_m + ib_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n.$$

Em ambos os casos P é um polinômio complexo e $P = p + iq$. Portanto

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &= |u(x) + iv(x) - p(x) - iq(x)| \\ &\leq |u(x) - p(x)| + |i(v(x) - q(x))| \\ &= |u(x) - p(x)| + |i|\,|v(x) - q(x)| \\ &= |u(x) - p(x)| + |v(x) - q(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. □

1.2 Uma demonstração usando polinômios trigonométricos

Nosso objetivo, a seguir, é apresentar uma demonstração do Teorema da Aproximação de Weierstrass usando polinômios trigonométricos. A demonstração aqui apresentada aparece em [13, Seção 4.11]. Antes disso vejamos duas definições e um lema que serão úteis nessa demonstração.

Definição 1.5 Seja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que g é *afim por partes* se existe uma partição,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_n = b$$

do intervalo $[a,b]$ tal que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, a restrição de g ao subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ é uma função afim (isto é, seu gráfico é um segmento de reta). Note que o gráfico de uma função afim por partes é um arco de polígono.

Um passo preparatório é a aproximação de funções contínuas por funções afim por partes:

Lema 1.6 *Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então dado $\varepsilon > 0$ existe uma função afim por partes $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$ e $g(a) = g(b)$.*

Demonstração. Como $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ e f é uniformemente contínua, pois f é contínua e $[a,b]$ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ sempre que $x, y \in [a,b]$ e $|x - y| < \delta$.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{b-a}{\delta}$ e chamemos $h = \dfrac{b-a}{n} < \delta$. Consideremos agora a seguinte partição de $[a,b]$:

$$a = x_0,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots, x_j = a + jh, \ldots,\ x_n = a + nh = a + b - a = b.$$

Note que cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ tem amplitude $h < \delta$. Consideremos $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função contínua cujo gráfico liga os pontos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

nessa ordem por segmentos de reta. Formalmente, dado $x \in [a,b]$ existe $j \in 1, \ldots, n$ tal que $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Definimos

$$g(x) = f(x_{j-1}) + \frac{[f(x_j) - f(x_{j-1})]}{h}.(x - x_{j-1}). \tag{1.12}$$

É claro que g é afim por partes e $g(a) = g(b)$, mais ainda:

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= \left| f(x) - \left[f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h}.(x - x_{j-1}) \right] \right| \\
&\leq |f(x) - f(x_{j-1})| + \left| \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h}.(x - x_{j-1}) \right| \\
&= |f(x) - f(x_{j-1})| + |f(x_j) - f(x_{j-1})| \left| \frac{(x - x_{j-1})}{h} \right| \\
&\overset{(*)}{\leq} |f(x) - f(x_{j-1})| + |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$.
(*) Usamos aqui que $\dfrac{|x - x_{j-1}|}{h} \leq 1$. □

Definição 1.7 Seja $g\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Os números

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ e} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\text{sen}(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

denominam-se *coeficientes de Fourier de g*. A série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)],$$

onde a_n e b_n, $n \in \mathbb{N}$, são os coeficientes de Fourier, denomina-se *série de Fourier de g*.

Vejamos agora uma demonstração do teorema da Aproximação de Weierstrass usando polinômios trigonométricos.

Demonstração. A demonstração será dividida em três passos.

1. Na demonstração do Teorema 1.1 mostramos que se o teorema vale para funções contínuas em $[0,1]$, então vale para funções contínuas em $[a,b]$. Uma adaptação simples desse argumento mostra que se o teorema vale para funções contínuas definidas em $[-\pi,\pi]$, então também vale para funções contínuas definidas em $[a,b]$, para quaisquer $a < b$. Ou seja, basta provar o teorema para uma função contínua $f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Seja $f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ e $\varepsilon > 0$. Usando o Lema 1.6 para o número positivo $\frac{\varepsilon}{4}$, temos que existe uma função afim por partes $g\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Segue então que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De acordo com a Definição 1.5, sejam a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes de Fourier de g. Como g é afim por partes então g é de classe C^2 por partes; e como $g(-\pi) = g(\pi)$, segue por [11, Teorema 50.2] que a série de Fourier de g converge uniformemente. Além disso como g é contínua temos por [11, Teorema 50.3] que a série de Fourier de g converge uniformemente para a própria função g. Isto é, chamando

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}(kx)],\ x \in [-\pi,\pi],$$

temos que (S_n) converge uniformemente para g. Como $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Em particular, fixando $N \geqslant n_0$ temos que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - S_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como as funções $\cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(Nx), \mathrm{sen}(x), \mathrm{sen}(2x), \ldots, \mathrm{sen}(Nx)$ são todas analíticas, então S_N também é analítica, sendo a combinação linear de funções analíticas. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n$ a série de Taylor de S_N em torno da origem. Temos então

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

com convergência uniforme sobre conjuntos compactos.
Chamando $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$ temos que (P_n) converge uniformemente para S_N em $[-\pi,\pi]$.
Como $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |S_N(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geqslant k_0.$$

Em particular fixando $N' \geq k_0$ temos que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |S_N(x) - P_{N'}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} |f(x) - P_{N'}(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - P_{N'}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$, onde $P_{N'}$ é polinômio. Isso prova o teorema para funções contínuas $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(-\pi) = f(\pi)$.

3. Finalmente, seja $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Consideremos as funções

$$\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \gamma(x) = \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi} \cdot x,$$

e

$$u\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ u(x) = f(x) + \gamma(x + \pi).$$

É claro que γ é um polinômio e que u é contínua, mais ainda

$$\begin{aligned} u(-\pi) &= f(-\pi) + \gamma(0) = f(-\pi) = f(\pi) - f(\pi) + f(-\pi) \\ &= f(\pi) + \gamma(2\pi) = u(\pi). \end{aligned}$$

O passo 2 então se aplica a u, e assim dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio $Q : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|u(x) - Q(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [-\pi, \pi].$$

Definindo $P(x) = Q(x) - \gamma(x - \pi)$ temos que P é um polinômio e

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &= |u(x) - \gamma(x + \pi) - P(x)| \\ &= |u(x) + P(x) - Q(x) - P(x)| \\ &= |u(x) - Q(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$, o que completa a demonstração do teorema.

$\square$

Capítulo 2

O Teorema de Stone-Weierstrass para funções em compactos Hausdorff

Relembremos que um espaço topológico X é *compacto* se toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita. A partir de agora, K será sempre um espaço topológico compacto de Hausdorff. Por $C(K;\mathbb{R})$ e $C(K;\mathbb{C})$ denotamos os espaços de Banach das funções contínuas $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f\colon K \longrightarrow \mathbb{C}$ respectivamente, com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Notemos que $C(K;\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real e $C(K;\mathbb{C})$ é um espaço vetorial complexo. Quando não houver perigo de ambiguidade escreveremos apenas $C(K)$ e nesse caso o corpo de escalares será denotado por $\mathbb{K}$, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em ambos os casos $C(K)$ é uma álgebra no sentido de que se $f, g \in C(K)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então $f + g$, $f \cdot g$ e $\alpha \cdot f$ pertencem a $C(K)$. Quando $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, escrevemos $C[a, b]$ ao invés de $C([a, b])$.

Em linguagem topológica, o Teorema 1.1 diz que o conjunto dos polinômios é denso em $C([a, b];\mathbb{R})$ e o Colorario 1.4 diz que o conjunto dos polinômios complexos é denso em $C([a, b];\mathbb{C})$. Essa observação leva diretamente à busca de subconjuntos de $C(K)$, formados por funções simples, que sejam densos em $C(K)$. É claro que agora não temos mais polinômios, pois não faz sentido falar em polinômio definido em um espaço topológico. Neste capítulo descreveremos a solução que Marshall Stone deu em 1937 para esse problema.

A questão central é identificar as funções que farão o papel dos polinômios neste contexto mais abstrato. É natural buscar funções que, de certa forma, reproduzem o comportamento dos polinômios. Uma propriedade óbvia dos polinômios é que a soma e o produto de polinômios é ainda um polinômio e o produto de um polinômio por um escalar também é um polinômio. Isso nos leva à seguinte definição:

Definição 2.1 Um subconjunto A de $C(K)$ é uma *sub-álgebra* se toda vez que tivermos $f, g \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$, for verdade que $f + g$, $f \cdot g$ e $\alpha \cdot f$ estão todas em A.

É claro que o conjunto dos polinômios é uma sub-álgebra de $C[a, b]$. Para identificar uma importante propriedade que qualquer subconjunto de $C(K)$ deve ter para ser denso precisamos recordar alguns fatos da Topologia Geral.

Definição 2.2 Um espaço topológico X é *normal* se para todos conjuntos fechados e disjuntos A e B de X existem conjuntos abertos e disjuntos U e V tais que $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

Lema 2.3 *Sejam X normal, $F \subseteq X$ fechado e $U \subseteq X$ aberto tal que $F \subseteq U$. Então existe um aberto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, (onde $\overline{V}$ é o fecho de V).*

Demonstração. Veja [20, Lemma 4.1.1]. □

Lema 2.4 (Lema de Urysohn) *Sejam A e B dois subconjuntos fechados e disjuntos de um espaço normal X. Então existe uma função contínua $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.*

Demonstração. Veja [26, Lemma 15.6] . □

Agora sim podemos identificar a propriedade que estávamos procurando:

Proposição 2.5 *Seja A um subconjunto denso de $C(K)$. Então para todos $x, y \in K$, $x \neq y$, existe uma função $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$.*

Demonstração. Primeiramente relembremos que todo compacto Hausdorff é normal (veja [26, Theorem 17.10]), e portanto os Lemas 2.3 e 2.4 se aplicam a K. Sejam $x, y \in K$, $x \neq y$. Como K é Hausdorff, existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $U \cap V = \emptyset$; então $x \in U$ e $y \notin U$. O conjunto unitário $\{x\}$ é fechado pois K é Hausdorff e $\{x\} \subseteq U$, então pelo Lema 2.3 existe um conjunto aberto W tal que $\{x\} \subset W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Mas $\overline{W}$ e U^c são fechados e disjuntos, então pelo Lema de Urysohn 2.4 existe uma função $f \in C(K)$ tal que

$$f(K) \subseteq [0,1];\ f(t) = 0 \text{ para todo } t \in \overline{W} \text{ e } f(t) = 1 \text{ para todo } t \in U^c.$$

Como A é denso em $C(K)$, existe $g \in A$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{1}{3}$ e portanto

$$|f(t) - g(t)| < \frac{1}{3} \quad \text{para todo } t \in K.$$

Por um lado

$$|g(x)| \ = \ |0 - g(x)| \ = \ |f(x) - g(x)| \ < \ \frac{1}{3},$$

e por outro lado

$$|1 - g(y)| = |f(y) - g(y)| < \frac{1}{3},$$

o que implica que $|g(y)| > \frac{2}{3}$. Portanto $g(x) \neq g(y)$. □

Quando um subconjunto A de $C(K)$ satisfaz a propriedade da Proposição 2.5, dizemos que A *separa pontos de* K, ou seja: A separa pontos de K se para todos $x, y \in K$, $x \neq y$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$.

Até o momento os conjuntos candidatos a serem densos em $C(K)$ são as sub-álgebras de $C(K)$ que separam pontos de K. Será que toda sub-álgebra de $C(K)$ que separa pontos de K é densa em $C(K)$?

Exemplo 2.6 Seja A o subconjunto de $C[0,1]$ formado pelos polinômios de grau maior ou igual que 1, ou seja, A é o subespaço de $C[0,1]$ gerado pelas funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ onde $f_n(x) = x^n$. Observemos que $f(0) = 0$ para toda função $f \in A$. É imediato que A é uma sub-álgebra de $C[0,1]$ e a presença da função $f_1(x) = x$ garante que A separa pontos de $[0,1]$. Vejamos que A não é denso em $C[0,1]$: para isso consideremos um escalar $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ e chamemos de g a função constante igual a α, isto é:

$$g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ g(x) = \alpha \text{ para todo } x \in [0,1].$$

É claro que $g \in C[0,1]$. Suponhamos que $g \in \overline{A}$. Nesse caso existe $f \in A$ tal que $\|g - f\|_\infty < \frac{|\alpha|}{2}$. De

$$|g(0)| = |g(0) - 0| = |g(0) - f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - f(x)| = \|g - f\|_\infty < \frac{|\alpha|}{2},$$

segue que $g(0) \neq \alpha$, o que é um absurdo. Concluímos então que $g \notin \overline{A}$, e portanto mesmo sendo uma sub-álgebra de $C[0,1]$ que separa pontos de $[0,1]$, A não é denso em $C[0,1]$.

Observando que a falha no exemplo acima reside no fato de que a sub-álgebra não contém as funções constantes, a pergunta agora é se toda sub-álgebra de $C(K)$ que separa pontos e contém as funções constantes é densa em $C(K)$. Veremos a seguir que essa é precisamente a solução que Stone deu para o problema. Comecemos com o caso real:

Teorema 2.7 (Teorema de Stone-Weierstrass - caso real) *Sejam K um espaço compacto de Hausdorff e A uma sub-álgebra de $C(K;\mathbb{R})$ que separa pontos e contém as funções constantes. Então A é denso em $C(K,\mathbb{R})$.*

Observação 2.8 No enunciado acima, como A é uma sub-álgebra, para conter as funções constantes basta conter uma função constante não-nula. Basta então supor, por exemplo, que A contém a função constante igual a 1.

Daremos aqui a demonstração de Brosowski e Deutsch [4] como apresentada em [22, Theorem 6.2]. A demonstração é dividida em etapas, as quais apresentaremos a seguir na forma de lemas.

Lema 2.9 *Sejam X espaço topológico, $A \subseteq X$ compacto e $U \subseteq X$ aberto. Então $(A - U) := A \cap U^c$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $(A - U)$, ou seja, cada C_λ é um conjunto aberto e $(A - U) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Então $\{U, (C_\lambda)_{\lambda \in L}\}$ é uma coleção de abertos e como $A = (A - U) \cup (A \cap U)$, segue que $\{U, (C_\lambda)_{\lambda \in L}\}$ é uma cobertura aberta de A pois os conjuntos $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ cobrem $(A - U)$ enquanto que U cobre $A \cap U$. Mas A é compacto, logo existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $A \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^n C_{\lambda_j}\right) \cup U$. Vejamos que $(A - U) \subseteq \bigcup_{j=1}^n C_{\lambda_j}$: dado $x \in (A - U)$, $x \in A$ e $x \notin U$, e portanto existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in C_{\lambda_k}$. Segue que $x \in \bigcup_{j=1}^n C_{\lambda_j}$, provando que $(A - U)$ é compacto. $\square$

Lema 2.10 *Sejam K e A como no enunciado do Teorema de Stone-Weierstrass 2.7. Sejam também $x_0 \in K$ um ponto qualquer e $U_0 \subseteq K$ um aberto contendo x_0. Então existe um conjunto aberto $V_0 \subseteq U_0$ contendo x_0 tal que, para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $g \in A$ satisfazendo:*

(i) $0 \leq g(x) \leq 1$ *para todo* $x \in K$,

(ii) $g(x) < \varepsilon$ *para todo* $x \in V_0$,

(iii) $g(x) > 1 - \varepsilon$ *para todo* $x \in K - U_0$.

Demonstração. Como $x_0 \in U_0$ e A separa pontos de K, para cada $x \in (K - U_0)$ existe $g_x \in A$ tal que $g_x(x_0) \neq g_x(x)$. Consideremos a função

$$h_x\colon K \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ h_x(y) = g_x(y) - g_x(x_0).$$

A função constante igual a $-g_x(x_0)$ pertence a A, e como A é uma sub-álgebra e $g_x \in A$, segue que $h_x \in A$. Temos também

$$h_x(x_0) = g_x(x_0) - g_x(x_0) = 0 \neq g_x(x) - g_x(x_0) = h_x(x).$$

Tomemos $p_x = \dfrac{1}{\|h_x\|_\infty^2} \cdot h_x^2$. É claro que p_x está também em A e mais ainda:

1. $p_x(x_0) = 0$, pois $h_x(x_0) = 0$.
2. $p_x(x) > 0$, pois $h_x^2(y) \geq 0$ para todo y e $h_x(x) \neq 0$.
3. $0 \leq p_x(y) \leq 1$ para todo $y \in K$: de fato $|h_x(y)| \leq \sup\{|h_x(z)|\ ; z \in K\} = \|h_x\|_\infty$; daí $h_x(y)^2 = |h_x(y)|^2 \leq \|h_x\|_\infty^2$; e portanto $0 \leq p_x(y) = \dfrac{h_x(y)^2}{\|h_x\|_\infty^2} \leq 1$.

Seja $U_x = \{y \in K : p_x(y) > 0\}$. Então $U_x = p_x^{-1}((0, +\infty))$ é um conjunto aberto pois é a imagem inversa de um aberto por uma função contínua, e U_x contém x pela propriedade 2 acima. Assim $(U_x)_{x \in (K - U_0)}$ é uma cobertura aberta de $(K - U_0)$. Pelo Lema 2.9 sabemos que $K - U_0$ é compacto. Logo, existe um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_m \in (K - U_0)$ tal que

$$(K - U_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}.$$

Definamos a função

$$p\colon K \longrightarrow \mathbb{R}\ , p(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_{x_i}(x)\ .$$

Como cada p_{x_i} está em A, $p(x)$ está também em A. Além disso:

- $0 \leq p(x) \leq 1$ para todo $x \in K$,
- $p(x_0) = 0$,
- $p(x) > 0$ para todo $x \in (K - U_0)$.

Como $(K - U_0)$ é compacto e p é contínua, temos que p assume valor mínimo em $(K - U_0)$, e do terceiro item acima segue que esse valor mínimo é estritamente positivo. Tomemos $0 < \delta < 1$ como sendo esse valor mínimo, e então temos que $p(x) \geq \delta$ para todo $x \in (K - U_0)$. Tomemos também o conjunto

$$V_0 = \left\{ x \in K : p(x) < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Vejamos algumas propriedades de V_0:

- $V_0 = p^{-1}((-\infty, \frac{\delta}{2}))$ é aberto como a imagem inversa de aberto por função contínua,
- $x_0 \in V_0$, pois $p(x_0) = 0 < \frac{\delta}{2}$,
- $V_0 \subseteq U_0$: de fato, dado $x \in V_0$, temos que $p(x) < \frac{\delta}{2}$, logo $x \notin (K - U_0)$, pois $p(x) \geq \delta$ em $(K - U_0)$, assim $x \in (K - U_0)^c = U_0$.

Seja k o menor inteiro maior que $\frac{1}{\delta}$. Provemos que $k\delta < 2$:

$$k \text{ é o menor inteiro maior que } \frac{1}{\delta} \Longrightarrow k - 1 \leq \frac{1}{\delta} \Longrightarrow k \leq \frac{1}{\delta} + 1 < \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} = \frac{2}{\delta}.$$

Assim $1 \leq k\delta < 2$. Definamos as funções

$$q_n \colon K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } q_n(x) = \left(1 - p(x)^n\right)^{k^n} \text{ ,}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Por A ser uma sub-álgebra que contém as funções constantes e por p estar em A, segue que cada q_n está em A. Nos interessarão duas propriedades das funções q_n:

- $q_n(x_0) = 1$ pois $p(x_0) = 0$,
- $0 \leq q_n(x) \leq 1$ para todo $x \in K$: de fato,

$$\begin{aligned} 0 \leq p(x) \leq 1 &\Longrightarrow 0 \leq p(x)^n \leq 1 \\ &\Longrightarrow -1 \leq -p(x)^n \leq 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 1 - p(x)^n \leq 1 \\ &\Longrightarrow 0 \leq q_n(x) = (1 - p(x)^n)^{k^n} \leq 1. \end{aligned}$$

Para todo $x \in V_0$ temos que $p(x) < \frac{\delta}{2}$, portanto $kp(x) \leq k\frac{\delta}{2} < 1$. Da desigualdade de Bernoulli sabemos que

$$(1 + t)^n \geq 1 + nt,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \geq -1$. Aplicando essa desigualdade para $t = -p(x)^n$ temos

$$\begin{aligned} q_n(x) &= (1 - p(x)^n)^{k^n} \\ &\geq 1 - k^n p(x)^n \\ &= 1 - (kp(x))^n \\ &\geq 1 - \left(\frac{k\delta}{2}\right)^n, \text{ pois } kp(x) \leq \frac{k\delta}{2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{k\delta}{2} < 1$ e $|q_n(x) - 1| < \left(\frac{k\delta}{2}\right)^n$ para todo $x \in V_0$, segue que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q_n(x) = 1 \text{ uniformemente para } x \in V_0. \tag{2.1}$$

Para $x \in (K - U_0)$ temos que $p(x) \geq \delta$, e portanto $kp(x) \geq k\delta > 1$. Aplicando novamente a desigualdade de Bernoulli, agora para $t = -p(x)^n$, temos que

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ q_n(x) &= (1 - p(x)^n)^{k^n} \\ &= \frac{1}{k^n p(x)^n}(1 - p(x)^n)^{k^n} \cdot k^n p(x)^n \\ &\leq \frac{1}{k^n p(x)^n}(1 - p(x)^n)^{k^n} \cdot (1 + k^n p(x)^n) \\ &\leq \frac{1}{k^n p(x)^n}(1 - p(x)^n)^{k^n} \cdot (1 + p(x)^n)^{k^n} \\ &= \frac{1}{k^n p(x)^n} \underbrace{(1 - p(x)^{2n})^{k^n}}_{<1} \\ &\leq \frac{1}{k^n \delta^n} = \left(\frac{1}{k\delta}\right)^n. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{k\delta} < 1$ temos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q_n(x) = 0 \text{ uniformemente para } x \in (K - U_0). \tag{2.2}$$

Seja $0 < \varepsilon < 1$.

- De (2.1) temos que existe um natural N_1 tal que $|q_n(x) - 1| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N_1$ e todo $x \in V_0$, em particular

$$q_n(x) > 1 - \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_1 \text{ e todo } x \in V_0.$$

- De (2.2) temos que existe um natural N_2 tal que $|q_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N_2$ e todo $x \in (K - U_0)$, e como $q_n(x) \geq 0$ então

$$0 \leq q_n(x) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_2 \text{ e todo } x \in (K - U_0).$$

Tomando $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$ temos que

$$q_N(x) > 1 - \varepsilon \text{ para todo } x \in V_0 \text{ e}$$

$$q_N(x) < \varepsilon \text{ para todo } x \in (K - U_0).$$

Definamos

$$g\colon K \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ g(x) = 1 - q_N(x).$$

É claro que $g \in A$. Vejamos que g satisfaz as propriedades requeridas.

(i)

$$\begin{aligned} x \in K &\implies 0 \leq q_N(x) \leq 1 \\ &\implies 0 \leq 1 - g(x) \leq 1 \\ &\implies -1 \leq g(x) - 1 \leq 0 \\ &\implies 0 \leq g(x) \leq 1. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x \in V_0 &\implies q_N(x) > 1-\varepsilon \\ &\implies 1-g(x) > 1-\varepsilon \\ &\implies g(x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x \in (K-U_0) &\implies q_N(x) < \varepsilon \\ &\implies 1-g(x) < \varepsilon \\ &\implies g(x) > 1-\varepsilon. \end{aligned}$$

A demonstração está completa. □

Lema 2.11 *Sejam K e A como no enunciado do Teorema de Stone-Weierstrass 2.7. Considere dois subconjuntos disjuntos e fechados Y e Z de K. Então para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe uma função $g \in A$ satisfazendo:*

(i) $0 \leq g(x) \leq 1$ *para todo* $x \in K$,

(ii) $g(x) < \varepsilon$ *para todo* $x \in Y$,

(iii) $g(x) > 1-\varepsilon$ *para todo* $x \in Z$.

Demonstração. Definindo $U = K - Z$ temos que U é aberto em K e $Y \subseteq U$ pois $Y \cap Z = \emptyset$. Do Lema 2.10 temos que, para cada $x \in Y$ e para cada $\delta > 0$, existem um conjunto aberto $V_x \subseteq U$ contendo x e uma função $g_x \in A$ tais que:

(i) $0 \leq g_x(z) \leq 1$ para todo $z \in K$,

(ii) $g_x(z) < \delta$ para todo $z \in V_x$,

(iii) $g_x(z) > 1-\delta$ para todo $z \in U^c = Z$.

Assim $(V_x)_{x\in Y}$ é uma cobertura aberta de Y. Mas Y é um fechado dentro de um compacto, portanto Y é compacto também. Logo, existe um número finito de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_m \in Y$ tais que

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}.$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, aplicando a construção acima com $\delta = \frac{\varepsilon}{m} > 0$ para cada um dos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_m \in Y$, temos que existem funções $g_1, \ldots, g_m \in A$ tais que, para cada $i = 1, \ldots, m$:

(i) $0 \leq g_i(z) \leq 1$ para todo $z \in K$,

(ii) $g_i(z) < \frac{\varepsilon}{m}$ para todo $z \in V_{x_i}$,

(iii) $g_i(z) > 1 - \frac{\varepsilon}{m}$ para todo $z \in Z$.

Definamos $g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_m$ e provemos que g satisfaz as propriedades desejadas. É claro que $g \in A$ pois g é o produto finito de funções de A.

(i) É óbvio que $0 \leq g(x) \leq 1$ pois cada $0 \leq g_i(x) \leq 1$ para cada $i = 1, \ldots, m$ e cada $x \in K$.

(ii) Seja $y \in Y$. Como $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $y \in V_{x_j}$. Assim $g(y) = g_1(y) \cdots g_{j-1}(y) \cdot g_j(y) \cdot g_{j+1}(y) \cdots g_m(y) < \varepsilon$ pois $g_j(y) < \frac{\varepsilon}{m} < \varepsilon$ e $g_i(y) \leq 1$ para $i \neq j$.

(iii) Seja $z \in Z$. Então $g_1(z) > 1 - \frac{\varepsilon}{m}, \ldots, g_m(z) > 1 - \frac{\varepsilon}{m}$. Usando uma vez mais a desigualdade de Bernoulli temos que

$$\begin{aligned} g(z) &= g_1(z) \cdots g_m(z) \\ &> \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^m \\ &\geq 1 + m\left(-\frac{\varepsilon}{m}\right) \quad = \quad 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Retornemos agora à demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass.

Demonstração. Considere $f \in C(K, \mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Devemos mostrar que existe uma função $g \in A$ satisfazendo $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Na verdade basta mostrar que existe uma função $g \in A$ satisfazendo $\|f - g\|_\infty \leq 2\varepsilon$, e é isso que vamos fazer.

Vejamos que não há perda de generalidade em supor que $f \geq 0$: suponhamos que o resultado vale para funções não-negativas. Como

$$-f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ para todo } x \in K,$$

temos que a função $f + \|f\|_\infty$ está em $C(K)$ e é não-negativa. Portanto existe $h \in A$ tal que $\|h - (f + \|f\|_\infty)\|_\infty < \varepsilon$. Tomando $g = h - \|f\|_\infty$ temos que $g \in A$ pois a função constante igual a $\|f\|_\infty$ pertence a A e A é uma sub-álgebra. Logo

$$\|g - f\|_\infty = \|h - \|f\|_\infty - f\|_\infty = \|h - (f + \|f\|_\infty)\|_\infty < \varepsilon.$$

Também não há perda de generalidade em supor que $\varepsilon < \frac{1}{3}$.

Começamos escolhendo um inteiro positivo n tal que $(n-1)\varepsilon \geq \|f\|_\infty$ e definindo conjuntos $X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ por:

$$X_i = \left\{ x \in K : f(x) \leq \left(i - \frac{1}{3}\right)\varepsilon \right\} \text{ e}$$

$$Y_i = \left\{ x \in K : f(x) \geq \left(i + \frac{1}{3}\right)\varepsilon \right\},$$

para $i = 0, 1, \ldots, n$. Então vemos que:

$$X_i \cap Y_i = \emptyset \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = K \text{ e}$$

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_n = \emptyset.$$

Além disso, os conjuntos $X_i = f^{-1}\left((-\infty, (i - \frac{1}{3})\varepsilon]\right)$ e $Y_i = f^{-1}\left([(i + \frac{1}{3})\varepsilon, \infty)\right)$ são fechados como imagens inversas de conjuntos fechados por função contínua. Como para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, X_i e Y_i são subconjuntos disjuntos e fechados de K, pelo Lema 2.11 temos que para cada $0 < \varepsilon < 1$ e cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existe uma função $g_i \in A$ tal que:

(i) $0 \leq g_i(x) \leq 1$ para todo $x \in K$,

(ii) $g_i(x) < \frac{\varepsilon}{n}$ para todo $x \in X_i$,

(iii) $g_i(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{n}$ para todo $x \in Y_i$.

Definamos

$$g\colon K \longrightarrow \mathbb{R} \ \ , \ g(x) = \varepsilon \sum_{i=0}^{n} g_i.$$

É claro que $g \in A$. Consideremos um elemento arbitrário $x \in K$. Da definição dos conjuntos X_i e da cadeia de inclusões $\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = K$, segue que existe $i \geq 1$ tal que $x \in (X_i - X_{i-1})$. Para este valor de i,

$$\left(i - \frac{4}{3}\right)\varepsilon < f(x) < \left(i - \frac{1}{3}\right)\varepsilon \ \text{ e}$$

$$g_j(x) < \frac{\varepsilon}{n} \ \text{ para cada } j \geq i.$$

Note também que para cada valor $j \leq i-2$, $x \in Y_j$, e portanto $g_j(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{n}$. Destas duas últimas desigualdades temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \varepsilon \sum_{j=0}^{i-1} g_j(x) + \varepsilon \sum_{j=i}^{n} g_j(x) \\ &\leq \varepsilon i + \varepsilon(n-i+1)\frac{\varepsilon}{n} \\ &\leq \varepsilon i + \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon(i+\varepsilon) \\ &< \varepsilon\left(i + \frac{1}{3}\right) \ \text{ pois } \varepsilon < \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

e para cada $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \varepsilon \sum_{j=0}^{i-2} g_j(x) \\ &\geq \varepsilon(i-1)\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \\ &= \varepsilon(i-1) - \varepsilon^2\frac{(i-1)}{n} \\ &> \varepsilon(i-1) - \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon(i-1-\varepsilon) \\ &> \varepsilon\left(i - 1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \varepsilon\left(i - \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Provamos a desigualdade $g(x) > \varepsilon(i - \frac{4}{3})$ para $i \geq 2$, e para $i = 1$ ela é imediata. Assim temos que:

$$\left(i - \frac{4}{3}\right)\varepsilon < f(x) < \left(i - \frac{1}{3}\right)\varepsilon \quad \text{e}$$

$$\left(i - \frac{4}{3}\right)\varepsilon < g(x) < \left(i + \frac{1}{3}\right)\varepsilon.$$

Dessas últimas desigualdades segue que

$$-\left(i + \frac{1}{3}\right)\varepsilon < -g(x) < -\left(i - \frac{4}{3}\right)\varepsilon,$$

e combinando com as desigualdades imediatamente anteriores temos

$$\left(i - \frac{4}{3}\right)\varepsilon - \left(i + \frac{1}{3}\right)\varepsilon < f(x) - g(x) < \left(i - \frac{1}{3}\right)\varepsilon - \left(i - \frac{4}{3}\right)\varepsilon.$$

As manipulações seguintes completam a demonstração:

$$\varepsilon\left(i - \frac{4}{3} - i - \frac{1}{3}\right) < f(x) - g(x) < \varepsilon\left(i - \frac{1}{3} - i + \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\implies \varepsilon\left(-\frac{5}{3}\right) < f(x) - g(x) < \varepsilon \\
&\implies -2\varepsilon < f(x) - g(x) < 2\varepsilon \\
&\implies |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon \\
&\implies \|f - g\|_\infty \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Deve ser observado que essa demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass que acabamos de exibir, apesar de ser longa, não depende de nenhum resultado muito profundo de Análise ou de Topologia.

A seguir voltamos nossa atenção para o caso complexo. Nossa abordagem do caso complexo do Teorema de Stone-Weierstrass baseia-se em [23, Section 36]. A pergunta natural é: quais são as condições que garantem que uma sub-álgebra de $C(K, \mathbb{C})$ é densa em $C(K, \mathbb{C})$? Mais natural ainda é imaginar que as mesmas condições do caso real também funcionam no caso complexo. No caso de funções definidas no intervalo $[a, b]$, a passagem do caso real para o caso complexo, isto é, a passagem do Teorema 1.1 para o Corolário 1.4, foi relativamente simples, mas isso se deve ao fato de que estávamos trabalhando com polinômios, que fazem sentido tanto no caso real como no caso complexo. Isso é uma indicação de que no caso de um compacto Hausdorff K arbitrário, a situação pode não ser tão simples. E, de fato, a passagem do caso real para o caso complexo não se faz apenas através da transposição para o caso complexo das condições do caso real. Veremos em seguida que as condições do caso real não são suficientes para o caso complexo.

Exemplo 2.12 Seja Δ o disco unitário fechado do plano complexo, isto é:

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

É claro que Δ é compacto. Consideremos

$$\mathcal{A} = \{f \in C(\Delta; \mathbb{C}) : f \ \text{ é } \ \text{analítica no interior de } \Delta\}.$$

Isto é, $\mathcal{A}$, que é conhecida como *álgebra do disco*, é formada pelas funções $f\colon \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ que são contínuas em Δ e analíticas no interior de Δ. A álgebra do disco $\mathcal{A}$ desempenha um papel central tanto na Análise Funcional como na Análise Harmônica (veja [27, Chapter III.E.]).

Vejamos que:

- $\mathcal{A}$ é uma sub-álgebra de $C(\Delta, \mathbb{C})$: isso é imediato pois, da teoria de funções de uma variável complexa, sabemos que a soma e o produto de funções analíticas é também analítica, e o produto de um escalar por uma função analítica também é analítica.

- $\mathcal{A}$ separa pontos de Δ: é claro que a função identidade $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}, \ \ f(x) = x$, pertence a $\mathcal{A}$; logo para $x, y \in \Delta$, $x \neq y$, temos que $f(x) = x \neq y = f(y)$.

- $\mathcal{A}$ contém todas as funções constantes: isso também é imediato pois toda função constante é analítica.

- $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado em $C(\Delta; \mathbb{C})$: seja $(f_n) \subseteq \mathcal{A}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $C(\Delta; \mathbb{C})$. Assim (f_n) é uma sequência de funções analíticas convergindo uniformemente para f. Mas o limite uniforme de funções analíticas é também analítico (veja [16, Teorema V.1]), logo $f \in \mathcal{A}$, e portanto $\mathcal{A}$ é fechado (veja [17, Ex.1.13.7]).

- $\mathcal{A} \neq C(\Delta; \mathbb{C})$: De fato, tomando a função conjugado complexo $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{z}$, temos que g é contínua pois suas partes real e imaginária são contínuas, logo $g \in C(\Delta; \mathbb{C})$. Por outro lado, g não é analítica por não verificar as equações de Cauchy-Riemann, logo $g \notin \mathcal{A}$.

Assim temos que $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \neq C(\Delta; \mathbb{C})$, o que prova que, apesar de satisfazer as três condições do caso real do Teorema de Stone-Weierstrass, $\mathcal{A}$ não é denso em $C(\Delta; \mathbb{C})$.

Está claro então que alguma hipótese deve ser acrescentada para a validade do caso complexo do Teorema de Stone-Weierstrass. Novamente o contra-exemplo que apresentamos sugere o que deve ser acrescentado. Observemos que no Exemplo 2.12 usamos que a função identidade pertence a $\mathcal{A}$ enquanto que a função conjugado não pertence a $\mathcal{A}$. Ou seja, foi crucial que a álgebra do disco não satisfaz a implicação $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$. Agora é natural introduzir a hipótese $f \in A \Longrightarrow \overline{f} \in A$ para que uma sub-álgebra A de $C(K; \mathbb{C})$ seja densa.

Definição 2.13 Um subconjunto A de $C(K; \mathbb{C})$ é *fechado para conjugação complexa* se $\overline{f} \in A$ sempre que $f \in A$.

Veremos a seguir que a introdução dessa hipótese é suficiente.

Teorema 2.14 (Teorema de Stone-Weierstrass - caso complexo) *Sejam K um espaço compacto de Hausdorff e A uma sub-álgebra de $C(K;\mathbb{C})$ que separa pontos, contém as funções constantes e é fechada para conjugação complexa. Então A é denso em $C(K;\mathbb{C})$.*

Demonstração. Chamemos de B o subconjunto de A formado pelas funções que têm imagem real, isto é:

$$B = \{f \in A : f(K) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Enxergando B como subespaço vetorial do espaço vetorial real $C(K;\mathbb{R})$, vejamos que B satisfaz as condições do caso real do Teorema de Stone-Weierstrass:

- B **é uma sub-álgebra de** $C(K;\mathbb{R})$**:** dados $f, g \in B$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $f, g \in A$, $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ e $g(K) \subseteq \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo, segue que as funções $(f+g), f \cdot g$ e $\alpha \cdot f$ estão em A e $(f+g)(K) \subseteq \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(K) \subseteq \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot g)(K) \subseteq \mathbb{R}$; e portanto $(f+g), f \cdot g, \alpha \cdot g \in B$.

- B **separa pontos de** K**:** sejam $x, y \in K$, $x \neq y$. Como A separa pontos de K, existe $f \in A \subseteq C(K,\mathbb{C})$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Decomponhamos f em suas partes real e imaginária, digamos que $f = u + iv$. Como uma função complexa é contínua se e somente se suas partes real e imaginária são contínuas, temos que $u, v \in C(K,\mathbb{R})$. Então
$$u(x) + iv(x) = f(x) \neq f(y) = u(y) + iv(y),$$
o que implica que $u(x) \neq u(y)$ ou $v(x) \neq v(y)$. Basta provar agora que $u, v \in B$. Mas combinando o fato de que $f \in A$, A ser sub-álgebra e ser fechada por conjugação complexa com as igualdades
$$u = \operatorname{Re}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad \text{e} \quad v = \operatorname{Im}(f) = \frac{f - \overline{f}}{2},$$
segue imediatamente que $u, v \in A$. É claro que $u(K) \subseteq \mathbb{R}$ e $v(K) \subseteq \mathbb{R}$, logo $u, v \in B$.

- B **contém as funções constantes de** $C(K,\mathbb{R})$**:** sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e f a função constante igual a α, isto é, $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$ para todo $x \in K$. Enxergando f como função complexa temos que sua parte real é constante igual a α e sua parte imaginária é constante igual a 0. Assim f é contínua no sentido complexo, ou seja $f \in C(K,\mathbb{C})$. Mas f é uma função constante, por hipótese segue que $f \in A$. Como $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ temos que $f \in B$.

Pelo Teorema 2.7 temos que $\overline{B} = C(K;\mathbb{R})$. Sejam agora $f \in C(K;\mathbb{C})$ e $\varepsilon > 0$. Decompondo f em suas partes real e imaginária temos que $f(x) = u(x) + iv(x)$ para todo $x \in K$, onde $u, v\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$. Logo $u, v \in C(K;\mathbb{R}) = \overline{B}$. Então existem $g_1, g_2 \in B \subseteq A$ tais que

$$\|u - g_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ e } \ \|v - g_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definindo $g = g_1 + ig_2$ temos que $g \in A$ pois A é uma sub-álgebra. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_\infty &= \|u + iv - g_1 - ig_2\|_\infty \\
&= \|u - g_1 + i(v - g_2)\|_\infty \\
&\leq \|u - g_1\|_\infty + \|i(v - g_2)\|_\infty \\
&= \|u - g_1\|_\infty + \|v - g_2\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

provando que $f \in \overline{A}$. Portanto $\overline{A} = C(K; \mathbb{C})$. □

Discutiremos a seguir um pouco mais as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass. Antes de enunciar e demonstrar o teorema, nós justificamos cada uma das hipóteses (ser sub-álgebra, separar pontos, conter as funções constantes e ser fechada para conjugação complexa no caso complexo). O fato de conter as funções constantes talvez seja a hipótese menos natural, por isso a discutiremos um pouco mais a seguir.

Relembremos que no Exemplo 2.6 exibimos uma sub-álgebra de $C[0,1]$ que separa pontos mas não é densa. É fácil ver que no caso complexo aquela sub-álgebra é fechada por conjugação complexa. Observemos que a sub-álgebra daquele exemplo pode ser reescrita como

$$\{f \in C[0,1] : f \text{ é um polinômio e } f(0) = 0\}.$$

Veremos a seguir que, na verdade, uma sub-álgebra bem maior que essa (e que portanto também separa pontos), e que no caso complexo é fechada por conjugação complexa, não é densa em $C[0,1]$. Mais ainda, essa construção se generaliza para compactos Hausdorff arbitrários.

Proposição 2.15 *Sejam K um compacto de Hausdorff e $x_0 \in K$ um ponto qualquer. Então $A = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}$ é uma sub-álgebra de $C(K)$ que separa pontos de K, no caso complexo é fechada por conjugação complexa, mas não é densa em $C(K)$.*

Demonstração. Dados $f, g \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, e portanto $(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0) = 0$, $(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0$ e $(\alpha \cdot f)(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) = 0$. Isso prova que A é uma sub-álgebra.

Sejam $x, y \in K, x \neq y$. É claro que as igualdades $x = x_0$ e $y = x_0$ não podem ocorrer simultaneamente, então temos que ou $x \neq x_0$ ou $y \neq x_0$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $y \neq x_0$. Como K é de Hausdorff, os conjuntos $B = \{x_0, x\}$ e $C = \{y\}$ são fechados, e é claro que são disjuntos, então pelo Lema de Urysohn 2.4 existe uma função $f \in C(K)$ tal que $f(t) = 0$ para todo $t \in B$ e $f(t) = 1$ para todo $t \in C$. Assim, $f(x_0) = 0$ e portanto $f \in A$, e $f(x) = 0 \neq 1 = f(y)$, provando que A separa pontos de K.

Provemos que A é um conjunto fechado de $C(K)$. Para isso seja $f \in \overline{A}$. Então existe uma sequência $(f_n) \subseteq A$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $C(K)$. Assim

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto $f_n(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ (na verdade, o que estamos usando aqui é que a convergência na norma $\|\cdot\|_\infty$ é a convergência uniforme, que por sua vez implica na convergência pontual). Mas $f_n(x_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pois cada $f_n \in A$, logo $f(x_0) = 0$, provando que $f \in A$ e portanto A é fechado. É claro que $A \neq C(K)$, pois as funções constantes não-nulas pertencem a $C(K)$ e não pertencem a A, portanto $A = \overline{A} \neq C(K)$, o que prova que A não é denso em $C(K)$. $\square$

Um fato notável é que as únicas sub-álgebras de $C(K)$ que separam pontos, são fechadas por conjugação complexa no caso complexo e não são densas em $C(K)$, são exatamente as sub-álgebras da Proposição 2.15. Mais precisamente:

Proposição 2.16 *Sejam K um compacto de Hausdorff e A uma sub-álgebra de $C(K)$ que separa pontos de K, no caso complexo é fechada por conjugação complexa, mas não é densa em $C(K)$. Então existe $x_0 \in K$ tal que $A = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}$.*

Demonstração. Veja [7, Corollary V.8.2] ou [12, Teorema IV.1.4]. $\square$

Para o caso de sub-álgebras que não separam pontos sugerimos que o leitor veja [27, I.B.12].

Finalizamos este capítulo dizendo que existe um sem número de generalizações em várias direções do Teorema de Stone-Weierstrass na literatura. Citaremos apenas algumas das direções em que o teorema vem sendo generalizado:
- Domínios mais gerais: existem várias versões do teorema para funções contínuas definidas em espaços mais gerais que os espaços compactos de Hausdorff. Por exemplo, é clássica a versão do Teorema de Stone-Weierstrass para funções definidas em espaços localmente compactos (veja, por exemplo, [23, Section 38]).
- Contra-domínios mais gerais: em [19] pode ser encontrada uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para funções contínuas definidas em um espaço compacto de Hausdorff e tomando valores em um espaço normado real.
- Funções mais gerais: uma generalização do Teorema de Stone-Weierstrass para funções não necessariamente contínuas pode ser encontrada em [5] e [19].

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Momentos de uma função contínua

Começamos com uma aplicação simples mas bem interessante do Teorema da Aproximação de Weierstrass. Nesta seção seguimos [6, Application 11.6] e [9, Seção 9.9].

Definição 3.1 Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ define-se o *n-ésimo momento* de f por

$$M_n(f) = \int_a^b x^n f(x)dx.$$

A motivação física para o conceito de momento pode ser encontrada em [6, p. 167]. É claro que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ não implica $f = g$. Na verdade, duas funções podem ter um número infinito de momentos iguais sem que sejam idênticas.

Exemplo 3.2 Chamemos de f a função constante igual a 1 e de g a função constante igual a 0, ambas definidas no intervalo $[-1,1]$. De

$$M_n(f) - M_n(g) = \int_{-1}^1 x^n dx = 0 \text{ para todo } n \text{ ímpar,}$$

temos que $M_n(f) = M_n(g)$ para todo n ímpar, mas obviamente $f \neq g$.

O fato interessante é que se *todos* os momentos de duas funções contínuas são iguais, então as funções são idênticas. Usaremos o Teorema da Aproximação de Weierstrass para provar tal fato.

Teorema 3.3 *Sejam $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então $f = g$ se, e somente se, $M_n(f) = M_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponhamos que $M_n(f) = M_n(g)$ para todo n. Então

$$\int_a^b x^n(f(x) - g(x))dx = \int_a^b x^n f(x)dx - \int_a^b x^n g(x)dx = M_n(f) - M_n(g) = 0$$

para todo n.

Como todo polinômio é uma combinação linear finita das funções $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, e como a integral é linear, segue imediatamente que

$$\int_a^b P(x)(f(x) - g(x))dx = 0 \tag{3.1}$$

para todo polinômio $P\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Usando o Teorema da Aproximação de Weierstrass para a função contínua $(f - g)$ e para os números positivos $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, construímos uma sequência de polinômios (P_n) tais que $\|(f - g) - P_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ para todo n. Como $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ segue que $P_n \longrightarrow (f - g)$ em $C[a, b]$, ou, em outras palavras, (P_n) converge para $(f - g)$ uniformemente em $[a, b]$. Consequentemente temos que $(P_n \cdot (f - g))$ converge para $(f - g)^2$ uniformemente em $[a, b]$, e por [9, Teorema 9.10] segue que

$$\int_a^b P_n(x)(f(x) - g(x))dx \longrightarrow \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Mas de (3.1) sabemos que $\int_a^b P_n(x)(f(x) - g(x))\, dx = 0$ para todo n, e portanto $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = 0$. Como $(f(x) - g(x))^2 \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e a função $(f - g)$ é contínua, segue que $(f - g)^2 = 0$, isto é, $f = g$.

A recíproca é imediata. $\square$

3.2 Funções infinitamente diferenciáveis

O Teorema da Aproximação de Weierstrass diz, em particular, que toda função contínua $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções infinitamente diferenciáveis (é claro que polinômios são infinitamente diferenciáveis). Provaremos nesta seção mais uma aplicação do Teorema da Aproximação de Weierstrass, que diz que esse resultado se estende para funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$, ou seja, toda função contínua $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções infinitamente diferenciáveis. Seguiremos aqui o roteiro da demonstração de [6, Theorem 11.13].

Por função infinitamente diferenciável entendemos que seja uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tem derivadas de todas as ordens contínuas em todo $x \in \mathbb{R}$. O espaço formado por tais funções será denotado por $C^\infty(\mathbb{R})$.

Lema 3.4 *A função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

é infinitamente diferenciável.

Demonstração. Como diferenciabilidade é uma propriedade local e tanto a função constante igual a zero como a função

$$x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}\ ,\ x > 0,$$

são infinitamente diferenciáveis, segue que f é infinitamente diferenciável em todo $x \neq 0$. Resta então provar que f é infinitamente diferenciável em 0.

Notemos que para $x > 0$,

$$f'(x) = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}} = x^{-2}f(x) = p_1(x^{-1})f(x), \tag{3.2}$$

em que $p_1(x) = x^2$;

$$f''(x) = (x^{-4} - 2x^{-3})e^{-\frac{1}{x}} = (x^{-4} - 2x^{-3})f(x) = p_2(x^{-1})f(x),$$

em que $p_2(x) = x^4 - 2x^3$;

$$f'''(x) = (x^{-6} - 6x^{-5} + 6x^{-4})e^{-\frac{1}{x}} = (x^{-6} - 6x^{-5} + 6x^{-4})f(x) = p_3(x^{-1})f(x),$$

em que $p_3(x) = x^6 - 6x^5 + 6x^4$. Isso nos leva a crer que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = p_k(x^{-1})f(x),$$

para todo $x > 0$ em que p_k é um polinômio de grau menor ou igual a $2k$. Provemos isso por indução sobre k:

1. $k = 1$: é exatamente o que está provado em (3.2).

2. Hipótese de indução: suponhamos que o que queremos provar seja válido para k, isto é, existe um polinômio p_k de grau $\leq 2k$ tal que

$$f^{(k)}(x) = p_k(x^{-1})f(x) \text{ para todo } x > 0.$$

3. Provemos que o desejado vale para $k + 1$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}[p_k(x^{-1})f(x)] \\ &= \left[\frac{d}{dx}p_k(x^{-1})\right] f(x) + p_k(x^{-1})f'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right) p_k'(x^{-1})f(x) + p_k(x^{-1}) \left(\frac{1}{x^2}\right) f(x) \\ &= \left[-(x^{-1})^2p_k'(x^{-1}) + (x^{-1})^2p_k(x^{-1})\right] f(x). \end{aligned}$$

Definindo

$$p_{k+1}(x) = -x^2p_k'(x) + x^2p_k(x)$$

temos que

$$p_{k+1}(x^{-1})f(x) = \left[-(x^{-1})^2p_k'(x^{-1}) + (x^{-1})^2p_k(x^{-1})\right] f(x) = f^{k+1}(x),$$

e p_{k+1} é um polinômio de grau menor ou igual a

$$\max\{2 + (2\mathrm{k} - 1), 2 + 2\mathrm{k}\} = \max\{2\mathrm{k} + 1, 2\mathrm{k} + 2\} = 2\mathrm{k} + 2 = 2(\mathrm{k} + 1).$$

Portanto, o desejado vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para ver que f é contínua em zero, note que, se $y > 0$ então

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} > \frac{y^m}{m!} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim para $x > 0$,

$$0 < f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} < \frac{m!}{\frac{1}{x^m}} = m!x^m. \tag{3.3}$$

Em particular, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, provando que f é contínua em zero. Mais ainda, de

$$0 < \frac{f(x)}{x} < m!x^{m-1} \text{ para todo } x > 0,$$

e

$$\frac{f(x)}{x} = 0 \text{ para todo } x < 0,$$

obtemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Portanto f' existe e é contínua em zero por (3.3) e $f'(0) = 0$.

Provemos por indução sobre k que $f^{(k)}(0)$ existe, $f^{(k)}(0) = 0$ e $f^{(k)}$ é contínua em zero.

1. $k = 1$: é exatamente o que fizemos acima.

2. Hipótese de indução: suponhamos que seja válido para k, isto é, existe $f^{(k)}(0)$, $f^{(k)}$ é contínua em zero e $f^{(k)}(0) = 0$.

3. Provemos que vale para $k + 1$.

Devemos mostrar que existe $f^{(k+1)}(0)$, $f^{(k+1)}(0) = 0$ e $f^{(k+1)}$ é contínua em zero. Partindo da hipótese de indução temos que:

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot p_k(x^{-1}) \cdot f(x)$$

para todo $x > 0$, em que o grau de p_k é menor ou igual a $2k$, digamos

$$p_k(x) = a_{2k}x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Assim

$$p_k(x^{-1}) = a_{2k}x^{-2k} + a_{2k-1}x^{-2k+1} + \cdots + a_1 x^{-1} + a_0,$$

e portanto

$$\frac{1}{x}p_k(x^{-1}) = a_{2k}x^{-2k-1} + a_{2k-1}x^{-2k} + \cdots + a_1 x^{-2} + a_0 x^{-1}.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{x}p_k(x^{-1})x^{2k+2} = a_{2k}x + a_{2k-1}x^2 + \cdots + a_1 x^{2k} + a_0 x^{2k+1}. \tag{3.4}$$

Temos então que

$$\begin{array}{rcl}\left|\dfrac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}\right| & = & \dfrac{1}{x}|p_k(x^{-1})|f(x) \\ & \leq & \dfrac{1}{x}|p_k(x^{-1})|(2k+2)!x^{2k+2} \\ & = & \left|\dfrac{1}{x}p_k(x^{-1})(2k+2)!x^{2k+2}\right| \\ & \overset{(3.4)}{=} & (2k+2)!|a_{2k}x+a_{2k-1}x^2+\cdots+a_1x^{2k}+a_0x^{2k+1}| \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{array}$$

Segue que $f^{(k+1)}(0)$ existe e $f^{(k+1)}(0) = f^{(k)}(0) = 0$. Verifiquemos que f^{k+1} é contínua em 0. Como o grau de $p_{k+1}(x)$ é menor ou igual a $2(k+1) = 2k+2$, podemos escrever

$$p_{k+1}(x) = b_{2k+2}x^{2k+2} + b_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots + b_1x + b_0.$$

Assim

$$\begin{array}{rcl}|f^{(k+1)}(x)| & = & |p_{k+1}(x^{-1})f(x)| \\ & = & |b_{2k+2}x^{-2k-2}+b_{2k+1}x^{-2k-1}+\cdots+b_1x^{-1}+b_0|f(x) \\ & \leq & |b_{2k+2}x^{-2k-2}+b_{2k+1}x^{-2k-1}+\cdots+b_1x^{-1}+b_0|(2k+3)!x^{2k+3} \\ & = & (2k+3)!|b_{2k+2}x+b_{2k+1}x^2+\cdots+b_1x^{2k+2}+b_0x^{2k+3}| \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{array}$$

Então $\lim_{x\to 0} f^{(k+1)}(x) = 0 = f^{(k+1)}(0)$, provando que $f^{(k+1)}$ é contínua em zero. □

Lema 3.5 *Existe uma função* $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

(a) $g \in C^\infty(\mathbb{R})$*;*

(b) $g(x) = 0$ *se* $|x| \geq 1$*;*

(c) $g(x) > 0$ *se* $|x| < 1$.

Demonstração.
Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função do Lema 3.4. Definimos $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x+1)\cdot f(1-x).$$

É claro que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, pois pelo Lema 3.4 temos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, assim g é um produto de funções infinitamente diferenciáveis (composição e produto de funções infinitamente diferenciáveis é infinitamente diferenciável).

Para $|x| \geq 1$ temos que $x \geq 1$ ou $x \leq -1$, então $1-x \leq 0$ ou $x+1 \leq 0$. Assim $f(1-x) = 0$ ou $f(x+1) = 0$, e da definição de g segue que $g(x) = 0$.

Para $|x| < 1$ temos $-1 < x < 1$, então $x+1 > 0$ e $1-x > 0$. Assim $f(x+1) = e^{\frac{-1}{x+1}} > 0$ e $f(1-x) = e^{\frac{-1}{1-x}} > 0$, e da definição de g segue que $g(x) > 0$. □

Lema 3.6 *Existe uma função $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que:*

(i) $h(x) = 0$ *para* $|x| \geq 1$; $0 < h(x) \leq 1$ *para* $|x| < 1$ *e* $h(0) = 1$.

(ii) *Dados* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $n \leq x < n+1$, *temos que* $h(x-n) + h(x-n-1) = 1$ *enquanto que* $h(x-k) = 0$ *para qualquer inteiro* $k < n$ *ou* $k > n+1$.

Demonstração. Seja g a função construída no Lema 3.5, isto é, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que:

(a) $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;

(b) $g(x) = 0$ se $|x| \geq 1$;

(c) $g(x) > 0$ se $|x| < 1$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Podemos escolher $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n-1 < x < n+1$. Se $m \in \mathbb{Z}$ e $m \notin \{n-1, n, n+1\}$, então $|x-m| > 1$ e, portanto, $g(x-m) = 0$. Assim $g(x-m) = 0$ para todo $m \notin \{n-1, n, n+1\}$. Logo, existem no máximo três inteiros m tais que $g(x-m) \neq 0$. Isso garante que a série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x-n)$$

é na verdade uma soma finita de, no máximo, três termos. Podemos então definir

$$G\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x-n).$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, tomando novamente $n \in \mathbb{Z}$ com $n-1 < x < n+1$ temos que

$$G(x) = g(x-(n-1)) + g(x-n) + g(x-(n+1)),$$

e portanto $G \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Uma das seguintes possibilidades certamente ocorre:

(1) $x = n \in \mathbb{Z}$, nesse caso $g(x-n) > 0$ e $g(x-(n-1)) = g(x-(n+1)) = 0$,

(2) $n-1 < x < n$, nesse caso $g(x-(n-1)) > 0$ e $g(x-n) > 0$,

(3) $n < x < n+1$, nesse caso $g(x-n) > 0$ e $g(x-(n+1)) > 0$.

Como $g \geq 0$, segue que $G(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Está então bem definida a função

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad h(x) = \frac{g(x)}{G(x)}.$$

Como $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $G > 0$ e $G \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ segue que $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Mais ainda,

- Como $0 \in \mathbb{Z}$, tomando $n = 0$ no item (**1**) acima temos que $G(0) = g(0)$ e portanto $h(0) = 1$.
- Seja $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 1$. Então $h(x) = \frac{0}{G(x)} = 0$.

- Seja $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Tomando $n = 0$ novamente temos que

$$G(x) = \begin{cases} g(x+1) + g(x) & \text{se } \; -1 < x < 0 \\ g(0) & \text{se } \; x = 0 \\ g(x) + g(x-1) & \text{se } \; 0 < x < 1 \end{cases}$$

Logo,

$$0 < h(x) = \frac{g(x)}{G(x)} = \begin{cases} \frac{g(x)}{g(x+1)+g(x)} & \text{se } \; -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } \; x = 0 \\ \frac{g(x)}{g(x)+g(x-1)} & \text{se } \; 0 < x < 1 \end{cases} \leq 1$$

pois $g(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Está então provada a condição **(i)**.

Verifiquemos agora a condição **(ii)**. Para isso sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $n \leq x < n+1$. Então temos duas possibilidades:

- $x = n$, nesse caso $g(x-n) > 0$ e $g(x-k) = 0$ para todo $k \neq n$. Logo,

$$h(x-n) = \frac{g(x-n)}{G(x-n)} = \frac{g(x-n)}{\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(x-m)} = \frac{g(x-n)}{g(x-n)} = 1 \quad \text{e}$$

$$h(x-n-1) = h(x-(n+1)) = \frac{g(x-(n+1))}{\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(x-(m+1)} = 0.$$

  Assim $h(x-n) + h(x-n-1) = 1 + 0 = 1$.
  Para $k < n$ ou $k > n+1$; $g(x-k) = 0$, logo $h(x-k) = 0$.

- $n < x < n+1$, nesse caso $g(x-n) > 0$, $g(x-(n+1)) > 0$ e $g(x-k) = 0$ para todo $k \neq n$, $k \neq n+1$. Então

$$h(x-n) = \frac{g(x-n)}{G(x-n)} = \frac{g(x-n)}{\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(x-m)} = \frac{g(x-n)}{g(x-n) + g(x-(n+1))} \quad \text{e}$$

$$h(x-n-1) = h(x-(n+1)) = \frac{g(x-(n+1))}{\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(x-(m+1))} = \frac{g(x-(n+1))}{g(x-n) + g(x-(n+1))}$$

  Portanto

$$h(x-n)+h(x-n-1) = \frac{g(x-n)}{g(x-n)+g(x-(n+1))} + \frac{g(x-(n+1))}{g(x-n)+g(x-(n+1))} = 1.$$

  Para $k < n$ ou $k > n+1$, $g(x-k) = 0$, logo $h(x-k) = 0$.

$\square$

Agora sim, podemos provar a aproximação de funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por funções infinitamente diferenciáveis.

Teorema 3.7 *Seja* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe uma função* $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *infinitamente diferenciável tal que*

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Temos que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, considerando a restrição de f ao intervalo $[n-1, n+1]$, o Teorema da Aproximação de Weierstrass (Teorema 1.1) garante que existe um polinômio $p_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [n-1, n+1].$$

Definamos $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n(x)h(x-n),$$

em que h é a função construída no Lema 3.6, ou seja, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e satisfaz **(i)** e **(ii)** deste lema.

Vejamos que φ está bem definida, isto é, a série converge. Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [m, m+1]$. Então para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin \{m, m+1\}$, a condição **(i)** do Lema 3.6 garante que $h(x-n) = 0$. Assim temos que

$$\varphi(x) = p_m(x)h(x-m) + p_{m+1}(x)h(x-(m+1)),$$

provando que, para cada $x \in \mathbb{R}$, a série que define φ é na verdade a soma de, no máximo, dois termos.

Como p_m, p_{m+1} e h são todas funções infinitamente diferenciáveis, temos que φ é igualmente infinitamente diferenciável.

Da condição **(ii)** do Lema 3.6 temos que se $n \leq x < n+1$, então

$$\varphi(x) = p_n(x)h(x-n) + p_{n+1}(x)h(x-n-1)).$$

Assim, para $n \leq x < n+1$, como $h \geq 0$ e $h(x-n) + h(x-n-1) = 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - \varphi(x)| &= |1 \cdot f(x) - \varphi(x)| \\
&= |[h(x-n) + h(x-n-1)]f(x) - p_n(x)h(x-n) - p_{n+1}(x)h(x-n-1)| \\
&= |h(x-n)f(x) - p_n(x)h(x-n) + h(x-n-1)f(x) - p_{n+1}(x)h(x-n-1)| \\
&= |h(x-n)[f(x) - p_n(x)] + h(x-n-1)[f(x) - p_{n+1}(x)]| \\
&\leq h(x-n)|f(x) - p_n(x)| + h(x-n-1)|f(x) - p_{n+1}(x)| \\
&< h(x-n)\varepsilon + h(x-n-1)\varepsilon \\
&< [h(x-n) + h(x-n-1)]\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3.3 Separabilidade de espaços de funções

Recordemos que um espaço topológico é *separável* se contém um subconjunto enumerável denso. A separabilidade é uma propriedade importante em Topologia e mais importante ainda em Análise Funcional, pois a teoria dos espaços de Banach separáveis é muito mais rica que a teoria de espaços não-separáveis. Por isso é uma questão central saber se determinados espaços são separáveis ou não. Nesta seção estudaremos a separabilidade dos espaços $C(K)$ com K compacto Hausdorff, culminando com o resultado que caracteriza exatamente para quais compactos K o espaço $C(K)$ é separável.

Nosso primeiro objetivo é mostrar, como aplicação do Teorema da Aproximação de Weierstrass, que o espaço $C[a,b]$ é separável. Ao longo desta seção usaremos várias propriedades dos conjuntos enumeráveis, as quais resumiremos a seguir.

Observação 3.8

1. Seja X um conjunto enumerável. Se existe uma função sobrejetora $f\colon X \longrightarrow Y$, então Y é enumerável.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$ é enumerável.

3. Seja $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma coleção enumerável de conjuntos enumeráveis. Então a união $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.

4. O corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais é um conjunto enumerável e denso em $\mathbb{R}$.

5. Chamemos $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{p + iq : p, q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$. Vejamos que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é enumerável: de fato, a função

$$f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \quad ; \quad (p,q) \mapsto f(p,q) = p + iq,$$

é claramente sobrejetora. Dos itens 4 e 2 segue que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é enumerável, e assim do item 1 segue que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é enumerável.

6. Vejamos que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$: dados $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, como $a, b \in \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, existem $p, q \in \mathbb{Q}$ tais que $|a - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|b - q| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Logo $w = p + iq \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ e

$$\begin{aligned} |z - w| &= |a + ib - p - iq| \\ &\leq |a - p| + |i| \cdot |b - q| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que $\overline{\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}} = \mathbb{C}$.

Seguiremos o roteiro de [25, Korollar I.2.11] para provar que $C[a,b]$ é separável.

Definição 3.9 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dado um subconjunto $A \subseteq V$, denotamos por $[A]$ o subespaço vetorial de V gerado por A, isto é:

$$[A] = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ x_1, \ldots, x_n \in A\}.$$

Lema 3.10 *Seja E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Então E é separável se, e somente se, existe $A \subseteq E$ enumerável tal que $\overline{[A]} = E$.*

Demonstração. Suponhamos E separável. Então existe $A \subseteq E$ enumerável e denso em E. Logo A é enumerável e $E = \overline{A} \subseteq \overline{[A]} \subseteq E$, o que nos dá $\overline{[A]} = E$.

Reciprocamente, suponhamos que exista um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $\overline{[A]} = E$. Faremos o caso complexo, e ao final comentaremos o caso real. A partir de agora então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Chamemos de B o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, ou seja:

$$B = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n : x_1, \ldots, x_n \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \ \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definindo os conjuntos

$B_1 = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \ \text{ e } x \in A\}$,

$B_2 = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \ \text{ e } x_1, x_2 \in A\}$,

$\vdots$

$B_n = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \ \text{ e } x_1, \ldots x_n \in A\}$,

$\vdots$

segue facilmente que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos a função:

$$f_n\colon \overbrace{(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times \cdots \times (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})}^{n \text{ vezes}} \times \overbrace{A \times \cdots \times A}^{n \text{ vezes}} \longrightarrow B_n$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Da definição de B_n segue imediatamente que f_n é sobrejetora. Temos por hipótese que A é enumerável e pela Observação 3.8(5) sabemos que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é enumerável. Pela Observação 3.8(2) segue $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times \cdots \times (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times A \times \cdots \times A$ também é enumerável, portanto B_n é enumerável pela Observação 3.8(1).

Consequentemente, temos pela Observação 3.8(3) que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ é enumerável como a união enumerável de conjuntos enumeráveis.

Provaremos agora que B é denso em E, ou seja, $\overline{B} = E$. Devemos então provar que dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $y \in B$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Para isso sejam $x \in E$ e $\varepsilon > 0$. Nossa hipótese é que $\overline{[A]} = E$, portanto existe $y_0 \in [A]$ tal que $\|x - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Digamos $y_0 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$, em que $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e $x_j \in A$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Pela Observação 3.8 (6) sabemos que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$, portanto existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tais que

$$|\alpha_j - \lambda_j| < \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|} \ \text{ para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Tomando $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$ temos que $y \in B$ e

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - y_0 + y_0 - y\| \leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k - \alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_k x_k\| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \|(\lambda_1 - \alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda_k - \alpha_k)x_k\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + (|\lambda_1 - \alpha_1| \cdot \|x_1\| + \cdots + |\lambda_k - \alpha_k| \cdot \|x_k\|) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \max_{j=1,\ldots,k} |\lambda_j - \alpha_j| \left(\|x_1\| + \cdots + \|x_k\|\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|} \cdot \sum_{i=1}^{k}\|x_i\| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $\overline{B} = E$. Assim $B \subseteq E$ é enumerável e denso, completando a demonstração de que E é separável. Para o caso real basta repetir o mesmo argumento com $\mathbb{Q}$ no lugar de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. $\square$

Teorema 3.11 *O espaço $C[a,b]$ é separável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função

$$f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}, \; f_n(t) = t^n.$$

Tomando $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ temos que A é enumerável, $A \subseteq C[a,b]$ e $[A]$ é o conjunto de todos os polinômios. Segue então do Teorema da Aproximação de Weierstrass 1.1, que $\overline{[A]} = C[a,b]$. Como $A \subseteq C[a,b]$ é enumerável e $[A]$ é denso, temos pelo Lema 3.10 que $C[a,b]$ é separável. $\square$

Analisaremos a seguir a separabilidade dos espaços $C(K)$ com K compacto Hausdorff. Usamos os polinômios para provar que $C[a,b]$ é separável, portanto esse argumento de nada serve para provar que $C(K)$ é separável. Em primeiro lugar devemos nos perguntar: será que $C(K)$ é separável para todo compacto Hausdorff K?

Exemplo 3.12 [18, Exemplo 3.7] Vejamos que o espaço

$$\ell_\infty = \{(\lambda_j)_{j=1}^\infty : \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| < +\infty\},$$

não é separável. Suponha que ℓ_∞ seja separável. Existe então uma sequência $(\xi^n)_{n=1}^\infty$, com $\xi^n \in \ell_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, densa em ℓ_∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $\xi^n = (\xi_j^n)_{j=1}^\infty$. Seja $\eta = (\eta_j)_{j=1}^\infty$ a sequência definida por

$$\eta_j = \begin{cases} 0, & \text{se } |\xi_j^j| \geq 1 \\ \xi_j^j + 1, & \text{se } |\xi_j^j| < 1 \end{cases}$$

Vejamos que $\eta \in \ell_\infty$: de fato

$$\|\eta\|_\infty = \sup_j |\eta_j| = \sup_j\{|\xi_n^j + 1| : |\xi_j^j| < 1\} \leq \sup_j\{|\xi_j^j| + 1 : |\xi_j^j| < 1\} \leq 1 + 1 = 2.$$

Como a sequência $(\xi^n)_{n=1}^\infty$ é densa em ℓ_∞, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\eta - \xi^N\|_\infty < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Em particular para $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\eta - \xi^N\|_\infty < 1 \text{ para todo } n \geq N. \tag{3.5}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
\|\eta - \xi^n\|_\infty &= \|(\eta_j - \xi_j^n)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j |\eta_j - \xi_j^n| \\
&= \sup\{|\eta_1 - \xi_1^n|, |\eta_2 - \xi_2^n|, \ldots, |\eta_n - \xi_n^n|, |\eta_{n+1} - \xi_{n+1}^n|, \ldots\} \\
&\geq |\eta_n - \xi_n^n| \\
&= \begin{cases} |0 - \xi_n^n| \text{ se } |\xi_n^n| \geq 1 \\ |\xi_n^n + 1 - \xi_n^n| \text{ se } |\xi_n^n| < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} |\xi_n^n| \text{ se } |\xi_n^n| \geq 1 \\ 1 \text{ se } |\xi_n^n| < 1 \end{cases} \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

Portanto $\|\eta - \xi^n\|_\infty \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz (3.5). Consequentemente temos que ℓ_∞ não é separável.

No Teorema 3.22 provaremos que existe um compacto Hausdorff K tal que ℓ_∞ é isometricamente isomorfo a $C(K)$. Acabamos de provar que ℓ_∞ não é separável, portanto $C(K)$ não é separável. Sendo assim, não é verdade que todo espaço $C(K)$ com K compacto Hausdorff é separável. Mas do Teorema 3.11 sabemos que existem compactos Hausdorff K tais que $C(K)$ é separável. A pergunta então é inevitável: para quais compactos Hausdorff K é verdade que $C(K)$ é separável? Nosso próximo objetivo é caracterizar tais compactos Hausdorff. O restante dessa seção foi retirada de [20, Section 4.3].

Precisaremos de alguns resultados topológicos, apresentados a seguir. Aqueles que são facilmente encontrados na literatura serão enunciados apenas com referência para demonstração, aqueles que não são tão canônicos serão demonstrados.

Definição 3.13 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é metrizável se existe uma métrica d definida em X tal que a topologia induzida por d coincide com a topologia original.*

Lema 3.14 *Todo compacto metrizável tem base enumerável.*

Demonstração. Veja [20, Corollary 4.1.11]. □

Lema 3.15 *Sejam K e Y espaços topológicos tais que K é compacto e Y é Hausdorff. Se $f\colon K \longrightarrow Y$ é bijetora e contínua, então f é homeomorfismo.*

Demonstração. Veja [20, Theorem 3.3.11]. □

Lema 3.16 *Sejam K um compacto Hausdorff, B um subconjunto denso de $\mathbb{K}$ e $L \subseteq C(K)$ tais que:*

(i) *Se $f, g \in L$ então $(f+g) \in L$ e $f \cdot g \in L$*

(ii) *Se $\lambda \in B$ e $f \in L$ então $\lambda \cdot f \in L$.*

Então $\overline{L}$ é uma sub-álgebra de $C(K)$.

Demonstração.

(i) Dadas $f, g \in \overline{L}$, existem sequências (f_n) e (g_n) em L tais que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{e} \quad g_n \longrightarrow g.$$

Então $f_n + g_n \longrightarrow f + g$; $\quad f_n \cdot g_n \longrightarrow f \cdot g$ o que implica que $f+g$ e $f \cdot g$ pertencem a $\overline{L}$.

(ii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \overline{L}$. Devemos provar que $\lambda \cdot f \in \overline{L}$. Seja $\varepsilon > 0$. Se f é a função nula não há o que provar. Podemos então supor que f não é a função nula, e portanto $\|f\|_\infty \neq 0$. Como $\lambda \in \mathbb{K} = \overline{B}$ e $\dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} > 0$, existe $0 \neq \alpha \in B$ tal que $|\lambda - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$. Como $f \in \overline{L}$ e $\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|} > 0$, existe $g \in L$ tal que $\|f - g\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|}$. Temos então $\alpha \cdot g \in L$ e

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot f - \alpha \cdot g\|_\infty &= \|\lambda \cdot f - \alpha \cdot f + \alpha \cdot f - \alpha \cdot g\|_\infty \\
&\leq \|\lambda \cdot f - \alpha \cdot f\|_\infty + \|\alpha \cdot f - \alpha \cdot g\|_\infty \\
&= |\lambda - \alpha| \cdot \|f\|_\infty + |\alpha| \cdot \|f - g\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

provando que $\lambda \cdot f \in \overline{L}$.

□

Se (X, τ) é um espaço topológico, por $\tau \times \tau$ denotaremos a topologia produto em $X \times X$. Se d é uma métrica em um determinado conjunto, por τ_d denotaremos a topologia nesse conjunto induzida pela métrica d.

Lema 3.17 *Sejam (X, τ) um espaço topológico e d uma métrica em X tais que $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\tau \times \tau$-contínua. Então $\tau_d \subseteq \tau$.*

Demonstração. Sejam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Provemos que a bola aberta

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}$$

pertence a τ. Chamemos de f a restrição de d a $\{a\} \times X$, isto é:

$$f = d|_{\{a\} \times X} \colon \{a\} \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(a, x) = d(a, x).$$

Segue que f é contínua como a restrição de função contínua.

Definamos agora as seguintes funções:

$$g\colon (X,\tau) \longrightarrow \{a\}\times X,\quad g(x)=(a,x) \text{ e}$$

$$h\colon (X,\tau) \longrightarrow \mathbb{R},\quad h(x)=f\circ g.$$

$$(X,\tau) \xrightarrow{g} \{a\}\times X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Assim h é contínua como a composta de funções contínuas e

$$h(x)=f(g(x))=f(a,x)=d(a,x) \text{ para todo } x\in X.$$

Como

$$\begin{aligned} B(a,\varepsilon) &= \{x\in X : d(a,x)<\varepsilon\} \\ &= \{x\in X : h(x)<\varepsilon\} \\ &= \{x\in X : h(x)\in(-\infty,\varepsilon)\} \\ &= h^{-1}((-\infty,\varepsilon)) \end{aligned}$$

segue que $B(a,\varepsilon)\in\tau$ pois $(-\infty,\varepsilon)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e h é contínua. Provamos que todas as bolas abertas segundo d pertencem a τ. Como em qualquer espaço métrico, as bolas abertas segundo d formam uma base para τ_d, portanto todo elemento de τ_d pode ser escrito como uma união de bolas abertas, todas elas pertencentes a τ. Como τ é uma topologia, segue que todo elemento de τ_d pertence a τ.

□

Agora sim estamos em condições de provar a caracterização dos compactos Hausdorff K para os quais $C(K)$ é separável.

Teorema 3.18 *Seja K um espaço topológico compacto de Hausdorff. Então $C(K)$ é separável se e somente se K é metrizável.*

Demonstração. Faremos novamente o caso complexo. Suponhamos primeiramente que K é metrizável. Pelo Lema 3.14 sabemos que K tem base enumerável, digamos $\mathcal{B}=\{U_1,U_2,\ldots,U_n,\ldots\}$. Como K é aberto em si mesmo, podemos supor que $K\in\mathcal{B}$, isto é: existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $K=U_N$; pois caso $K\notin\mathcal{B}$ passaríamos a trabalhar com $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\cup\{K\}$ que também é base enumerável de K. Definimos

$$A=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \overline{U_n}\subseteq U_m\}.$$

Seja $(n,m)\in A$. Então $\overline{U_n}$ e U_m^c são fechados e disjuntos. Sabemos que K é normal pois é um compacto Hausdorff (todo espaço metrizável é Hausdorff), logo pelo Lema de Urysohn existe $f_{n,m}\in C(K)$ tal que

$$f_{n,m}(K)\subseteq[0,1] \;\text{ e }\; f_{n,m}(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x\in\overline{U_n} \\ 0, & \text{se } x\in U_m^c \end{cases}$$

É claro que

$$S = \{f_{n,m} : (n,m) \in A\} = (f_{n,m})_{(n,m)\in A}$$

é um subconjunto enumerável de $C(K)$ pois $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Chamaremos de Π_S o conjunto formado pelos produtos finitos de funções de S e, para cada $n \in \mathbb{N}$, de B_n o conjunto formado pelos produtos de n funções de S. Assim,

$$\begin{aligned} \Pi_S &= \{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n : f_1, f_2, \ldots, f_n \in S, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n : f_1, \ldots, f_n \in S\}}_{B_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \end{aligned}$$

Como a função

$$h\colon \overbrace{S \times \cdots \times S}^{n} \longrightarrow B_n \ , \ h(f_1, \ldots, f_n) = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n,$$

é claramente sobrejetora e $\overbrace{S \times \cdots \times S}^{(n)}$ é enumerável, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n é enumerável. Segue da observação 3.8(1) que Π_S é enumerável. Considere

$$L = \{\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : \lambda_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ f_j \in \Pi_S;\ j = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(K).$$

Vejamos que:

• L é enumerável: definindo C_n, $n \in \mathbb{N}$, pela expressão

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : \lambda_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ f_j \in \Pi_S,\ j = 1, \ldots, n\}}_{C_n},$$

como a função

$$h'\colon \overbrace{(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times \cdots \times (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})}^{n} \times \overbrace{\Pi_S \times \cdots \times \Pi_S}^{n} \longrightarrow C_n$$
$$h'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, f_1, \ldots, f_n) = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$$

é sobrejetora e $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n \times (\Pi_S)^n$ é enumerável, segue que C_n é enumerável para todo n, e portanto L é enumerável.

• $\overline{L}$ é uma sub-álgebra de $C(K)$: para isso vejamos que L satisfaz as condições do Lema 3.16 com $B = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Sejam $f, g \in L$ e $\lambda \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Digamos

$$f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n \quad \text{e} \quad g = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$$

com $\lambda_j, \alpha_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ e $f_j, g_j \in \Pi_S$. Dessa forma

$$\begin{aligned} f + g &= \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n + \alpha_1 g_1 + \cdots \alpha_m g_m \in L, \\ f \cdot g &= (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n) \cdot (\alpha_1 g_1 + \cdots \alpha_m g_m) \\ &= \underbrace{(\lambda_1 \alpha_1)}_{\in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \underbrace{f_1 g_1}_{\in \Pi_S} + \underbrace{(\lambda_1 \alpha_2)}_{\in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \underbrace{f_1 g_2}_{\in \Pi_S} + \cdots + \underbrace{(\lambda_n \alpha_m)}_{\in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \underbrace{f_m g_m}_{\in \Pi_S} \in L, \\ \lambda(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n) &= (\lambda\lambda_1) f_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n) f_n \in L. \end{aligned}$$

Já sabemos que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$, portanto pelo Lema 3.16 temos que $\overline{L}$ é uma sub-álgebra de $C(K)$.

• $\overline{L}$ contém as funções constantes: como $\overline{U_N} = \overline{K} = K = U_N$, temos que $(N, N) \in A$. Logo $f_{N,N} \in S \subseteq \Pi_S \subseteq L \subseteq \overline{L}$. Mas $f_{N,N}(x) = 1$ para todo $x \in \overline{U_N} = K$, ou seja a função constante igual a 1 está em $\overline{L}$. Como $\overline{L}$ é sub-álgebra, $\overline{L}$ contém as funções constantes.

• $\overline{L}$ separa pontos de K: sejam $x, y \in K, x \neq y$. Como K é Hausdorff, existem U aberto contendo x e V aberto contendo y tais que $U \cap V = \emptyset$. Logo $x \in U$ e $y \notin U$. Como $\mathcal{B}$ é base para a topologia de K e U é aberto, segue que U é uma união de elementos de $\mathcal{B}$. Como $x \in U$ e $y \notin U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m$ e $y \notin U_m$. Como $\{x\}$ é fechado, U_m é aberto e $\{x\} \subseteq U_m$, pelo Lema 2.3 existe um aberto W tal que $\{x\} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U_m$. Mas W também é uma união de elementos de $\mathcal{B}$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n \subseteq W$. Assim $x \in U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq \overline{W} \subseteq U_m$. Então $(n, m) \in A$, logo $f_{n,m} \in S \subseteq \overline{L}$. Portanto

$$f_{n,m}(x) = 1 \neq 0 = f_{n,m}(y)$$

pois $x \in U_n \subseteq \overline{U_n}$ e $y \notin U_m$, provando que $\overline{L}$ separa pontos de K.

• $\overline{L}$ é fechado para conjugação complexa. Provemos primeiro que L é fechado para conjugação complexa. Dada $f \in L$, $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ com $\lambda_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ e $f_j \in \Pi_S$ para $j = 1, \ldots, n$. Então $\overline{f} = \overline{\lambda_1} \cdot \overline{f_1} + \cdots + \overline{\lambda_n} \cdot \overline{f_n}$. Mas cada função f_j assume apenas valores reais, pois é o produto de funções que assumem apenas valores reais, logo $\overline{f_j} = f_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$, e assim temos $\overline{f} = \overline{\lambda_1} \cdot f_1 + \cdots + \overline{\lambda_n} \cdot f_n$. Como cada $\overline{\lambda_j} \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ e cada $f_j \in \Pi_S$, segue que $\overline{f} \in L$.

Seja agora $f \in \overline{L}$. Queremos provar que $\overline{f} \in \overline{L}$.

Podemos tomar uma sequência $(f_n) \subseteq L$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $C(K)$. A função

$$g \in C(K) \mapsto \overline{g} \in C(K)$$

é claramente contínua (na verdade é um isomorfismo isométrico), logo temos que $\overline{f_n} \longrightarrow \overline{f}$ em $C(K)$. Como L é fechado para conjugação complexa temos que $(\overline{f_n}) \subseteq L$, o que implica que $\overline{f} \in \overline{L}$.

Pelo Teorema de Stone-Weierstrass temos que $\overline{L}$ é denso em $C(K)$. Então $\overline{L} = \overline{\overline{L}} = C(K)$, e assim $C(K)$ é separável pois $L \subseteq C(K)$ é enumerável e denso.

Reciprocamente, suponhamos que $C(K)$ é separável. Seja $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de $C(K)$. Definimos

$$d \colon K \times K \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}.$$

Primeiramente verifiquemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}$ é convergente, isto é, d está bem definida. Para todos $x, y \in K$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} 1 + |f_n(x) - f_n(y)| > |f_n(x) - f_n(y)| \quad &\Longrightarrow \quad \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} < 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, então o critério da comparação garante a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}$.

Vejamos agora que d é uma métrica em K:

1. É imediato que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in K$, assim como a implicação $x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0$.

2. Suponha que $x, y \in K$ e $d(x, y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}$. Como todos os termos da série são não-negativos segue que todos são nulos, isto é:

$$\frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} = 0 \text{ para todo } n.$$

   Assim $|f_n(x) - f_n(y)| = 0$ para todo n, e portanto $f_n(x) = f_n(y)$ para todo n. Como o conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $C(K)$, pela Proposição 2.5 temos que $x = y$.

3. Desigualdade triangular. Primeiro note que a função

$$g \colon (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ g(t) = \frac{t}{1 + t},$$

   é crescente pois $g'(t) = \frac{1}{(1 + t)^2} > 0$ para todo $t > 0$. Sejam $x, y, z \in K$. Como

$$|f_n(x) - f_n(z)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)| \text{ para todo } n,$$

   temos que

$$g(|f_n(x) - f_n(z)|) \leq g(|f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)|) \text{ para todo } n,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)-f_n(z)|}{1+|f_n(x)-f_n(z)|} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(|f_n(x)-f_n(z)|) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(z)|) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(z)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(z)|} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(z)|} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(y)-f_n(z)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(z)|} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(y)-f_n(z)|}{1+|f_n(y)-f_n(z)|} \\
&= d(x,y)+d(y,z).
\end{aligned}$$

Então d é uma métrica em K. Chamemos de τ a topologia original de K e, como já vínhamos fazendo, de τ_d a topologia em K induzida pela métrica d. Cada uma das funções f_n que aparece na definição de d pertence a $C(K)$, e portanto é τ-contínua. Como todas as operações envolvidas na definição de d preservam continuidade, temos que d é $\tau \times \tau$-contínua. Pelo Lema 3.17 segue que $\tau_d \subseteq \tau$. Isso quer dizer que a função identidade $id\colon (K,\tau) \longrightarrow (K,\tau_d)$ é contínua. É claro que id é bijetora, logo pelo Lema 3.15 temos que id é homeomorfismo, e portanto $\tau = \tau_d$. Com isso a topologia original τ de K coincide com a topologia induzida por uma métrica, ou seja, K é metrizável.

O caso complexo está completo, e para o caso real basta novamente seguir os mesmos passos com $\mathbb{Q}$ no lugar de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. $\square$

Observação 3.19 Uma demonstração direta de que $C(K)$ é separável se K é um espaço *métrico* compacto pode ser encontrada em [6, Corollary 12.11]. Essa demonstração usa o Teorema de Stone-Weierstrass e o Teorema de Arzelá-Ascoli sobre o conjunto formado pelas funções lipschitzianas.

Finalizaremos esta seção com uma aplicação interessante do Teorema 3.18. Em Topologia são fatos bem conhecidos e úteis que a imagem contínua de um compacto é compacto, a imagem contínua de um conexo é conexo, e o mesmo para várias outras propriedades. Vejamos que com a metrizabilidade a história é diferente.

Exemplo 3.20 Seja (X, τ) espaço topológico não-metrizável, por exemplo a bola unitária fechada de um espaço normado não-separável munido da topologia fraca estrela. Consideremos X munido da topologia discreta, isto é o espaço topológico $(X, \mathcal{P}(X))$, onde $\mathcal{P}(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X. Vejamos que $(X, \mathcal{P}(X))$ é metrizável. Tomemos em X a *métrica zero-um*, isto é:

$$d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = y \\ 1 \text{ se } x \neq y \end{cases}$$

Vejamos que $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. É óbvio que $\tau_d \subseteq \mathcal{P}(X)$. Provemos que $\tau_d \supseteq \mathcal{P}(X)$. Para todo $x \in X$, $B_d(x,1) = \{y \in X : d(y,x) < 1\} = \{x\}$, e assim para todo $\{x\} \in \tau_d$. Então para todo $A \subseteq X$, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \tau_d$ como uma união de abertos. Segue $\tau_d = \mathcal{P}(X)$, logo $(X, \mathcal{P}(X))$ é metrizável.

É claro que a função identidade $id\colon (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, \tau)$ é sobrejetora e contínua, pois para todo $A \in \tau$, $id^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X)$. Então (X, τ) é a imagem do espaço metrizável $(X, \mathcal{P}(X))$ pela função contínua id, mas (X, τ) não é metrizável.

Sabemos agora então que a imagem de metrizável por função contínua não necessariamente é metrizável. Vejamos, como um corolário simples do Teorema 3.18, que ao acrescentarmos a hipótese do espaço ser compacto, a propriedade desejada passa a valer, isto é: a imagem contínua de um espaço *compacto* metrizável é metrizável. É interessante observar que na demonstração a seguir usamos as duas implicações do Teorema 3.18.

Corolário 3.21 *Sejam K um espaço compacto e metrizável, X um espaço de Hausdorff e $f\colon K \longrightarrow X$ uma função contínua e sobrejetora. Então X é metrizável.*

Demonstração. Como K é compacto e metrizável, pelo Teorema 3.18 temos que $C(K)$ é separável. Como f é contínua e $X = f(K)$ segue que X é compacto. Vejamos que $C(X)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço de $C(K)$. Para isso definimos

$$u\colon C(X) \longrightarrow C(K); \quad u(g) = g \circ f.$$

É claro que u está bem definida pois a composta de funções contínuas é contínua. Vejamos que u é linear: dadas $g, h \in C(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$u(g + \lambda h) = (g + \lambda h) \circ f = g \circ f + (\lambda h) \circ f = g \circ f + \lambda(h \circ f) = u(g) + \lambda u(h).$$

Além disso, u é uma imersão isométrica (logo injetora):

$$\begin{aligned} \|u(g)\|_\infty &= \|g \circ f\|_\infty \\ &= \sup\{|g \circ f(x)| : x \in K\} \\ &= \sup\{|g(f(x))| : x \in K\} \\ &= \sup\{|g(y)| : y \in f(K)\} \\ &= \sup\{|g(y)| : y \in X\} = \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim $u(C(X))$ é um subespaço de $C(K)$ isometricamente isomorfo a $C(X)$. Mas $C(K)$ é separável, então $C(X)$ é separável como subespaço de espaço separável. Pelo Teorema 3.18 concluímos que X é metrizável. $\square$

3.4 $\ell_\infty = C(K)$

O espaço ℓ_∞ desempenha um papel central na teoria dos espaços de Banach. Entre as propriedades que destacam ℓ_∞ dos demais espaços de Banach podemos citar:

• Todo espaço separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞ (veja [3, Theorem IV.II.2]).

• ℓ_∞ é um espaço injetivo, isto é, se E é um subespaço de F e $u \colon E \longrightarrow \ell_\infty$ é um operador linear e contínuo, então u pode ser estendido a F, isto é, existe um operador linear e contínuo $\tilde{u} \colon F \longrightarrow \ell_\infty$ tal que $\tilde{u}(x) = u(x)$ para todo $x \in E$ (veja [15, pág. 105]).

Sendo assim toda informação sobre ℓ_∞ é relevante. Nesta seção provaremos uma importante propriedade de ℓ_∞, a saber, o fato de ℓ_∞ ser um espaço $C(K)$. Relembre que nós mesmos, após o Exemplo 3.12, usamos essa propriedade. Mais precisamente, nosso objetivo nesta seção é usar o Teorema de Stone-Weierstrass para provar o

Teorema 3.22 *Existe um espaço topológico compacto de Hausdorff K tal que ℓ_∞ é isometricamente isomorfo a $C(K)$.*

Esse teorema é normalmente demonstrado como uma consequência do Teorema de Gelfand-Naimark para representação de C*-álgebras, caso comutativo. É claro que nesse caso deve-se primeiro construir toda a teoria de álgebras de Banach e de C*-álgebras. Uma outra demonstração desse fato, sem usar o Teorema de Gelfand-Naimark mas que mesmo assim usa sofisticadas técnicas da teoria das álgebras de Banach, pode ser encontrada em [1, Theorem 4.2.5]. Nesta seção demonstraremos o teorema usando um arsenal matemático bem mais modesto que o Teorema de Gelfand-Naimark e a teoria de álgebras de Banach. As duas demonstrações mencionadas acima obtêm o caso de ℓ_∞ como caso particular de um teorema bem mais geral. A idéia aqui é obter o caso de ℓ_∞ diretamente, usando o mínimo possível de pré-requisitos. Mas, obviamente, mesmo essa demonstração depende de outros resultados além do Teorema de Stone-Weierstrass, inclusive um outro resultado fundamental devido a Marshall Stone, o qual passamos a descrever. A demonstração do Teorema 3.22 que apresentaremos a seguir é uma adaptação para o caso de ℓ_∞ da demonstração de [2, Theorem 2.1].

Definição 3.23 Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. $\mathcal{B}$ é uma *álgebra booleana* se:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{B}$.

(ii) Se $A \in \mathcal{B}$ então $A^c \in \mathcal{B}$.

(iii) Se $A, B \in \mathcal{B}$ então $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Observação 3.24 Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra booleana, então:

(a) Se $A, B \in \mathcal{B}$ então $A \cap B \in \mathcal{B}$, pois $A \cap B = [(A \cap B)^c]^c = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{B}$.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, por indução segue facilmente que $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \in \mathcal{B}$ e $(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \in \mathcal{B}$.

Exemplo 3.25 Seja (X, τ) espaço topológico. Defina

$$\text{clopen}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ é simultaneamente aberto e fechado}\}.$$

As propriedades de conjuntos abertos e fechados implicam imediatamente que clopen(X) é uma álgebra booleana.

Definição 3.26 Duas álgebras booleanas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são isomorfas se existe um função $I\colon \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ tal que

(i) I é bijetora.

(ii) $I(A \cup B) = I(A) \cup I(B)$ para todos $A, B \in \mathcal{B}_1$.

(iii) $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$ para todos $A, B \in \mathcal{B}_1$.

(iv) $I(A)^c = I(A^c)$ para todo $A \in \mathcal{B}_1$.

Nesse caso dizemos que I é um isomorfismo booleano.

Definição 3.27 Um espaço topológico (X, τ) é *totalmente desconexo* se para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existem abertos disjuntos A e B tais que $x \in A$, $y \in B$ e $X = A \cup B$. É claro que todo espaço totalmente desconexo é de Hausdorff.

O teorema abaixo, demonstrado por Stone em 1937, diz que o estudo das álgebras booleanas pode ser reduzido ao estudo das álgebras booleanas descritas no Exemplo 3.25.

Teorema 3.28 (Teorema da Representação de Stone). *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra booleana. Então existe um espaço topológico K compacto totalmente desconexo (logo Hausdorff) tal que $\mathcal{B}$ é isomorfa a álgebra booleana clopen(K) dos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de K.*

Demonstração. A demonstração original de Stone encontra-se em [24]. Outras demonstrações podem ser encontradas em [8], [14] e [23]. $\square$

Apresentaremos a seguir outros conceitos e resultados que serão necessários para demonstrar o Teorema 3.22. A partir de agora identificaremos sequências de escalares com funções definidas em $\mathbb{N}$ a valores no corpo de escalares através da correspondência

$$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \longleftrightarrow f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ f(n) = \lambda_n.$$

Definição 3.29 Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, podemos considerar a função

$$\mathcal{X}_A\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mathcal{X}_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in A \\ 0, & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

chamada de *função característica* de A. É claro que $\mathcal{X}_A \in \ell_\infty$ para todo $A \subseteq \mathbb{N}$. Uma *função simples* é uma função que é uma combinação linear finita de funções características, ou seja, uma função da forma

$$\varphi = a_1\mathcal{X}_{A_1} + \cdots + a_n\mathcal{X}_{A_n}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}$. A representação de uma função simples na forma acima não é única. Entretanto veremos a seguir que será única a menos da ordem se os escalares $a_1, \ldots, a_n$ forem não nulos e distintos e os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ forem não vazios e disjuntos 2 a 2.

Lema 3.30 *Seja* $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ *uma função simples. Então existem escalares* $a_1, \ldots, a_n$ *não nulos e distintos, e conjuntos* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *não vazios e disjuntos 2 a 2 tais que*

$$\varphi = a_1\mathcal{X}_{A_1} + \cdots + a_n\mathcal{X}_{A_n}.$$

Mais ainda, a representação de φ *na forma acima é única a menos da ordem. Esta representação será chamada de representação canônica de* φ*.*

Demonstração.

- **Existência.** Como φ é uma função simples, então φ assume apenas um número finito de valores. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ os valores não-nulos assumidos por φ, isto é, $a_1, \ldots, a_n$ são escalares não-nulos e distintos para os quais $\varphi(x) = a_j$ para algum $x \in \mathbb{N}$. Para $j = 1, \ldots, n$, defina

  $$A_j = \varphi^{-1}(\{a_j\}) = \{x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = a_j\}.$$

  Então

  $$\varphi(x) = \begin{cases} a_1, & \text{se } x \in A_1 \\ a_2, & \text{se } x \in A_2 \\ \ \vdots & \\ a_n, & \text{se } x \in A_n \end{cases} = \sum_{j=1}^{n} a_j\mathcal{X}_{A_j}(x),$$

  provando que $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j\mathcal{X}_{A_j}$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, pela escolha dos escalares $a_1, \ldots, a_n$, existe $x_j \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_j) = a_j$, logo $x_j \in A_j$. Isso prova que $A_j \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Suponha que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Então existe $x \in A_i \cap A_j$, logo $x \in A_i$ e $x \in A_j$, o que implica que $a_i = \varphi(x) = a_j$. Mas isso é um absurdo pois os escalares $a_1, \ldots, a_n$ são distintos. Logo $A_i \cap A_j = \emptyset$, provando que os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos dois a dois.

- **Unicidade a menos da ordem.** Suponha que

  $$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{X}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j\mathcal{X}_{B_j}$$

  são duas representações de φ mediante as condições requeridas. Note que:

  $$x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin \bigcup_{j=1}^{m} B_j,$$

  o que prova que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)^c$. Sejam $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $x \in A_i$. Temos que

  $$0 \neq a_i = \varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j\mathcal{X}_{B_j}(x),$$

  portanto existe um único $j_i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in B_{j_i}$. Assim $a_i = \varphi(x) = b_{j_i}$ e $A_i \subseteq B_{j_i}$. Se $y \in B_{j_i}$ então $\varphi(y) = b_{j_i} = a_i$, o que implica que $y \in A_i$. Dessa forma $B_{j_i} = A_i$ e $b_{j_i} = a_i$. Provamos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe um único $j_i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $B_{j_i} = A_i$ e $b_{j_i} = a_i$. Como $a_1, \ldots, a_n$ são distintos então $b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}$ também são distintos. Temos então

$$\{a_1, \ldots, a_n\} = \{b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_m\},$$

e todos esses conjuntos são formados por elementos distintos. Segue então que $n \leq m$. Se reiniciarmos o processo com $x \in B_j$ no lugar de $x \in A_i$, o mesmo raciocínio nos leva a concluir que $m \leq n$, portanto $n = m$. Temos então que as correspondências

$$a_i \longleftrightarrow b_{j_i} \quad \text{e} \quad A_i \longleftrightarrow B_{j_i}$$

são biunívocas, isto é

$$a_1 = b_{j_1}, \ldots, a_n = b_{j_m}, \qquad A_1 = B_{j_1}, \ldots, A_n = B_{j_m}.$$

Está claro então que a representação $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ é uma reordenação da representação $\sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}$.

$\square$

Lema 3.31 *O conjunto das funções simples é denso em ℓ_∞.*

Demonstração. Seguimos aqui a demonstração apresentada em [21, Anexo A5.]. De acordo com a correspondência entre sequências de escalares e funções definidas em $\mathbb{N}$ a valores no corpo de escalares temos que

$$\ell_\infty = \{f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é limitada}\}.$$

Seja $f \in \ell_\infty$. Então $f(\mathbb{N})$ é limitado e portanto $\overline{f(\mathbb{N})}$ é limitado e fechado, logo compacto. Dado $\varepsilon > 0$, é claro que

$$\overline{f(\mathbb{N})} \subseteq \bigcup_{a \in \overline{f(\mathbb{N})}} B(a, \varepsilon),$$

onde $B(a, \varepsilon) = \{b \in \mathbb{K} : |b - a| < \varepsilon\}$. Da compacidade de $\overline{f(\mathbb{N})}$ segue que existe um número finito de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \overline{f(\mathbb{N})}$ tais que

$$\overline{f(\mathbb{N})} \subseteq \left(B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(a_n, \varepsilon)\right).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $f(k) \in f(\mathbb{N}) \subseteq \overline{f(\mathbb{N})}$, existe $j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $f(k) \in B(a_{j_k}, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} f(1) \in B(a_{j_1}, \varepsilon) \\ f(2) \in B(a_{j_2}, \varepsilon) \\ \qquad \vdots \\ f(k) \in B(a_{j_k}, \varepsilon) \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

Em particular, $|f(k) - a_{j_k}| < \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ por $g(k) = a_{j_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$\begin{cases} g(1) = a_{j_1} \\ g(2) = a_{j_2} \\ \quad\vdots \\ g(k) = a_{j_k} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Observe que g assume apenas um número finito de valores. De fato, $g(k) = a_{j_k}$, com $j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto $g(\mathbb{N}) \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$. Segue que g é uma função simples. Além disso

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(k) - g(k)| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(k) - a_{j_k}| \le \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. □

Lema 3.32 *Sejam E e F espaços de Banach, G subespaço denso de E e $u\colon G \longrightarrow F$ um operador linear e contínuo. Então existe um único operador linear e contínuo $\widetilde{u}\colon E \longrightarrow F$ tal que $\widetilde{u}(x) = u(x)$ para todo $x \in G$ e $\|\widetilde{u}\| = \|u\|$. Mais ainda, se $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in G$, então $\|\widetilde{u}(y)\| = \|y\|$ para todo $y \in E$.*

Demonstração. Seja $y \in E$. Queremos definir $\widetilde{u}(y) \in F$. Como $E = \overline{G}$, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$ tal que $x_n \longrightarrow y$. Como toda sequência convergente, $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy. A sequência $(u(x_n))_{n=1}^\infty$ está contida em F e

$$0 \le \|u(x_n) - u(x_m)\| = \|u(x_n - x_m)\| \le \|u\| \cdot \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0.$$

Logo $(u(x_n))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F. Como F é Banach, existe $z \in F$ tal que $u(x_n) \longrightarrow z$. Queremos definir $\widetilde{u}(y) = \lim_n u(x_n) = z$. Para isso precisamos provar que se $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma outra sequência em G também convergindo para y em E, então $(u(y_n))_{n=1}^\infty$ também converge para z em F. Para isso seja $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$ com $y_n \longrightarrow y$. Repetindo o procedimento acima concluímos que $(u(y_n))_{n=1}^\infty$ é convergente em F. Sabemos que $y_n \longrightarrow y$ e $x_n \longrightarrow y$, logo $(y_n - x_n) \longrightarrow y - y = 0$. Disso segue que

$$0 \le \|u(y_n) - u(x_n)\| = \|u(y_n - x_n)\| \le \|u\| \cdot \|y_n - x_n\| \longrightarrow 0.$$

Assim $u(y_n) - u(x_n) \longrightarrow 0$, e como essas duas sequências são convergentes temos que

$$\lim_n u(y_n) = \lim_n u(x_n) = z.$$

Agora sim podemos definir

$$\widetilde{u}\colon E \longrightarrow F \text{ por } \widetilde{u}(y) = \lim_n u(x_n),$$

onde $(x_n)_{n=1}^\infty$ é qualquer sequência em G convergindo para y.

Uma vez definido $\widetilde{u}$, vejamos que as condições desejadas são satisfeitas. Dado $x \in G$ tome $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $(x_n) \subseteq G$ e $x_n \longrightarrow x$, logo

$$\widetilde{u}(x) = \lim_n u(x_n) = \lim_n u(x) = u(x),$$

provando que $\widetilde{u}$ é extensão de u.

Sejam $y, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ em G com $x_n \longrightarrow y$ e $t_n \longrightarrow w$. Então $x_n + \lambda t_n \longrightarrow y + \lambda w$. Assim

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(y+\lambda w) &= \lim_n u(x_n + \lambda t_n) = \lim_n (u(x_n) + \lambda u(t_n)) \\ &= \lim_n u(x_n) + \lambda \lim_n u(t_n) = \widetilde{u}(y) + \lambda \widetilde{u}(w),\end{aligned}$$

provando que $\widetilde{u}$ é linear.

Sejam agora $y \in E$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ com $x_n \longrightarrow y$. Então $\|x_n\| \longrightarrow \|y\|$ e usando a continuidade de u temos que

$$\|\widetilde{u}(y)\| = \left\|\lim_n u(x_n)\right\| = \lim_n \|u(x_n)\| \leq \|u\| \cdot \lim_n \|x_n\| = \|u\| \cdot \|y\|.$$

Isso prova que $\widetilde{u}$ é contínua e $\|\widetilde{u}\| \leq \|u\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}\| &= \sup\{\|\widetilde{u}(y)\| \colon y \in E, \|y\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{\|\widetilde{u}(x)\| \colon x \in G, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|u(x)\| \colon x \in G, \|x\| \leq 1\} \;=\; \|u\|,\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\|\widetilde{u}\| = \|u\|$.

Suponha agora que $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in G$. Nesse caso, dado $y \in E$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em G convergindo para y, temos que

$$\|\widetilde{u}(y)\| = \left\|\lim_n u(x_n)\right\| = \lim_n \|u(x_n)\| = \lim_n \|x_n\| = \left\|\lim_n x_n\right\| = \|y\|.$$

□

Um operador linear $u \colon E \longrightarrow F$ entre espaços normados tal que $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ será chamado de *isometria linear*.

Lema 3.33 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $u \colon E \longrightarrow F$ uma isometria linear. Então $u(E)$ é fechado em F.*

Demonstração. Seja $y \in \overline{u(E)}$. Então existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq u(E)$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Para cada n, tome $x_n \in E$ tal que $y_n = u(x_n)$. De

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x_n - x_m\| = \|u(x_n - x_m)\| = \|u(x_n) - u(x_m)\| \\ &= \|y_n - y_m\| = \|y_n - y - y_m + y\| \leq \|y_n - y\| + \|y_m - y\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

concluímos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E. Como E é Banach, existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como u é contínua, pois é isometria, segue que $y_n = u(x_n) \longrightarrow u(x)$. Pela unicidade do limite temos que $y = u(x) \in u(E)$. Portanto $u(E)$ é fechado. □

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 3.22:

Demonstração. (Demonstração do Teorema 3.22) É claro que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das partes de $\mathbb{N}$ é uma álgebra booleana. Então pelo Teorema 3.28 existe um compacto K totalmente desconexo, logo Hausdorff, e um isomorfismo booleano

$$I\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \text{clopen}(K) = \{A \subseteq K\colon A \text{ é aberto e fechado}\},$$

Queremos definir um isomorfismo isométrico

$$J\colon \ell_\infty \longrightarrow C(K).$$

Começamos a definir J pelas funções simples da seguinte forma: dada uma função simples $\varphi \in \ell_\infty$, escrevendo-a na representação canônica $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{A_j}$ de acordo como o Lema 3.30, ou seja, os escalares $a_1, \ldots, a_n$ são não-nulos e distintos e os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são não vazios e disjuntos 2 a 2, definimos

$$J(\varphi) := a_1 \mathcal{X}_{I(A_1)} + \cdots + a_n \mathcal{X}_{I(A_n)} = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{I(A_j)}.$$

Como a representação canônica é única a menos da ordem, J está bem definida sobre as funções simples. Vejamos que esta é a representação canônica de $J(\varphi)$ (a representação canônica de uma função de K em $\mathbb{K}$ é definida nas condições do Lema 3.30):
• Os escalares $a_1, \ldots, a_n$ são não-nulos e distintos;
• Como cada $A_j \neq \emptyset$ e I é um isomorfismo booleano, segue que cada $I(A_j) \neq \emptyset$;
• Se $i \neq j$, como os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos 2 a 2 e I é um isomorfismo booleano segue que

$$I(A_j) \cap I(A_i) = I(A_j \cap A_i) = I(\emptyset) = \emptyset,$$

e portanto os conjuntos $I(A_1), \ldots, I(A_n)$ também são disjuntos 2 a 2.

Temos então que $J(\varphi)\colon K \longrightarrow \mathbb{K}$ e

$$J(\varphi)(x) = \begin{cases} a_1, & \text{se } x \in I(A_1) \\ a_2, & \text{se } x \in I(A_2) \\ \vdots & \\ a_n, & \text{se } x \in I(A_n) \\ 0, & \text{se } x \notin \bigcup_{j=1}^n I(A_j) \end{cases}$$

Provemos que:

- $J(\varphi) \in C(K)$, isto é, $J(\varphi)$ é uma função contínua: para $x \in K$, uma das possibilidades abaixo certamente ocorre:

  (i) $x \in \bigcup_{j=1}^n I(A_j)$: nesse caso existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in I(A_j)$. Sabemos que $I(A_j)$ é um aberto contendo x e $J(\varphi)(y) = a_j$ para todo $y \in I(A_j)$. Então

  $$|J(\varphi)(y) - J(\varphi)(x)| = |a_j - a_j| = 0$$

  para todo $y \in I(A_j)$. Assim dado $\varepsilon > 0$, $I(A_j)$ é um aberto contendo x, tal que $|J(\varphi)(y) - J(\varphi)(x)| = 0 < \varepsilon$, para todo $y \in I(A_j)$. Segue que $J(\varphi)$ é contínua em x.

(ii) $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} I(A_j)$: nesse caso $J(\varphi)(x) = 0$ e $x \in \left(\bigcup_{j=1}^{n} I(A_j)\right)^c$ que é um aberto, pois cada $I(A_j)$ é fechado. Mais ainda, $J(\varphi)(y) = 0$ para todo $y \in \left(\bigcup_{j=1}^{n} I(A_j)\right)^c$. Novamente $J(\varphi)$ é constante em um aberto contendo x. Repetindo o raciocínio acima temos que $J(\varphi)$ é contínua em x.

- ***J* é linear sobre as funções simples:** sejam $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ e $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}$, ambas na representação canônica. Note que

$$\text{se } y \in A_i \text{ e } x \in I(A_i) \text{ então } J(\varphi)(x) = a_i = \varphi(y), \tag{3.6}$$

e da mesma forma,

$$\text{se } y \in B_j \text{ e } x \in I(B_j) \text{ então } J(\psi)(x) = b_j = \psi(y). \tag{3.7}$$

Já sabemos que $J(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{I(A_i)}$ e $J(\psi) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{I(B_j)}$ são suas respectivas representações canônicas, em particular $I(A_1), \ldots, I(A_n)$ são não-vazios e disjuntos 2 a 2 e $I(B_1), \ldots, I(B_m)$ também são não-vazios e disjuntos 2 a 2. Queremos mostrar que

$$J(\varphi + \psi) = J(\varphi) + J(\psi).$$

Para isso seja $x \in K$. Existem quatro possibilidades:

(i) $x \in \bigcup_{i=1}^{n} I(A_i)$ e $x \in \bigcup_{j=1}^{m} I(B_j)$: nesse caso existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in I(A_i)$ e existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in I(B_j)$. Então $J(\varphi)(x) = a_i$ e $J(\psi)(x) = b_j$. Mais ainda, $I(A_i \cap B_j) = I(A_i) \cap I(B_j) \neq \emptyset$, logo $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ e portanto podemos tomar $y \in A_i \cap B_j$. Como $x \in I(A_i \cap B_j)$ e $y \in A_i \cap B_j$, de (3.6) e (3.7) temos que

$$\begin{aligned} J(\varphi + \psi)(x) &= (\varphi + \psi)(y) = \varphi(y) + \psi(y) = a_i + b_j \\ &= J(\varphi)(x) + J(\psi)(x) = [J(\varphi) + J(\psi)](x). \end{aligned}$$

(ii) $x \in \bigcup_{i=1}^{n} I(A_i)$ e $x \notin \bigcup_{j=1}^{m} I(B_j)$: nesse caso existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in I(A_i)$ e

$$x \in \left(\bigcup_{j=1}^{m} I(B_j)\right)^c = \bigcap_{j=1}^{m} I(B_j)^c = \bigcap_{j=1}^{m} I(B_j^c).$$

Logo $J(\varphi)(x) = a_i$ e $J(\psi)(x) = 0$. Como

$$x \in I(A_i) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m} I(B_j^c)\right) = I(A_i) \cap I(B_1^c) \cap \cdots \cap I(B_m^c) = I(A_i \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_m^c),$$

segue que $A_i \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_m^c \neq \emptyset$. Tomando $y \in A_i \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_m^c$, de (3.6) e (3.7) temos que

$$\begin{aligned} J(\varphi + \psi)(x) &= (\varphi + \psi)(y) = \varphi(y) + \psi(y) = a_i + 0 \\ &= J(\varphi)(x) + J(\psi)(x) = [J(\varphi) + J(\psi)](x). \end{aligned}$$

(iii) $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} I(A_i)$ e $x \in \bigcup_{j=1}^{m} I(B_j)$: esse caso é análogo ao caso anterior.

(iv) $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} I(A_i)$ e $x \notin \bigcup_{j=1}^{m} I(B_j)$: nesse caso

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} I(A_i)\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} I(A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} I(A_i^c) \text{ e}$$

$$x \in \left(\bigcup_{j=1}^{m} I(B_j)\right)^c = \bigcap_{j=1}^{m} I(B_j)^c = \bigcap_{j=1}^{m} I(B_j^c), \text{ portanto}$$

$$x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} I(A_i)^c\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m} I(B_j)^c\right) = I\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j^c\right)\right).$$

Podemos então escolher $y \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j^c\right)$.

De (3.6) e (3.7) temos que

$$\begin{aligned} J(\varphi+\psi)(x) &= (\varphi+\psi)(y) = \varphi(y)+\psi(y) = 0+0 \\ &= J(\varphi)(x)+J(\psi)(x) = [J(\varphi)+J(\psi)](x). \end{aligned}$$

Portanto $J(\varphi+\psi)(x) = J(\varphi)(x)+J(\psi)(x)$ para todo $x \in K$, isto é $J(\varphi+\psi) = J(\varphi)+J(\psi)$.
Sejam agora $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ na representação canônica e $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Se $\lambda = 0$ então

$$J(\lambda\varphi)(x) = J(0)(x) = 0 = 0 \cdot J(\varphi)(x) = (\lambda J(\varphi))(x).$$

- Se $\lambda \neq 0$ então

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)\mathcal{X}_{A_i}(x)$$

para todo $x \in K$. Então $\lambda\varphi = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)\mathcal{X}_{A_i}$, e como os escalares $\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n$ são não-nulos e distintos e os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são não-vazios e disjuntos 2 a 2, esta é a representação canônica de $\lambda\varphi$. Assim

$$J(\lambda\varphi) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)\mathcal{X}_{I(A_i)} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{I(A_i)}\right) = \lambda J(\varphi).$$

Provamos então que $J(\lambda\varphi) = \lambda J(\varphi)$, portanto J é linear.

- J **é uma isometria linear,** isto é $\|J(\varphi)\|_\infty = \|\varphi\|_{\ell_\infty}$ para toda função simples φ: de fato,

$$\begin{aligned} \|J(\varphi)\|_\infty &= \sup_{x\in K} |J(\varphi)(x)| \\ &= \max\{0, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(n)| = \|\varphi\|_{\ell_\infty}. \end{aligned}$$

Chamando de S o conjunto das funções simples, em particular temos que $J\colon S \longrightarrow C(K)$ é um operador linear e contínuo. Queremos estender J a ℓ_∞. Pelo Lema 3.31 sabemos que S é denso em ℓ_∞, portanto pelo Lema 3.32 existe uma isometria linear

$$\widetilde{J}\colon \ell_\infty \longrightarrow C(K)$$

tal que $\widetilde{J}(\varphi) = J(\varphi)$ para toda $\varphi \in S$.

Resta apenas mostrar que $\widetilde{J}$ é sobrejetora. Para isso considere o subespaço de $\widetilde{J}(\ell_\infty) \subseteq C(K)$. Pelo Lema 3.33 sabemos que $\widetilde{J}(\ell_\infty)$ é fechado em $C(K)$.

Chamemos $\beta = \widetilde{J}(S) = J(S) \subseteq C(K)$ e provemos que:

- **β é sub-álgebra de $C(K)$:** sejam $f, g \in J(S)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem $\varphi, \psi \in S$ tal que $f = J(\varphi)$ e $g = J(\psi)$. É claro que $\varphi + \psi \in S$ e $\lambda\varphi \in S$. Como J é linear temos que

$$f + g = J(\varphi) + J(\psi) = J(\varphi + \psi) \in J(S) \text{ e}$$
$$\lambda f = \lambda J(\varphi) = J(\lambda\varphi) \in J(S).$$

Escrevamos φ e ψ em suas representações canônicas

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}.$$

É facil ver que $\mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B = \mathcal{X}_{A\cap B}$. Então

$$\begin{aligned}\varphi \cdot \psi &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathcal{X}_{A_i} \cdot \mathcal{X}_{B_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathcal{X}_{A_i\cap B_j}.\end{aligned}$$

Assim $\varphi \cdot \psi \in S$ e usando a linearidade de J temos que

$$\begin{aligned}J(\varphi\cdot\psi) &= J\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathcal{X}_{A_i\cap B_j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j J(\mathcal{X}_{A_i\cap B_j})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathcal{X}_{I(A_i\cap B_j)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathcal{X}_{I(A_i)\cap I(B_j)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathcal{X}_{I(A_i)} \cdot \mathcal{X}_{I(B_j)}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{I(A_i)}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{I(B_j)}\right)\\ &= J(\varphi)\cdot J(\psi).\end{aligned}$$

Portanto $f \cdot g = J(\varphi) \cdot J(\psi) = J(\varphi \cdot \psi) \in J(S)$.

- β **contém as funções constantes:** seja $f \in C(K)$ uma função constante, digamos $f(x) = \alpha$ para todo $x \in K$. Então

$$f = \alpha \cdot \mathcal{X}_K = \alpha \cdot \mathcal{X}_{I(\mathbb{N})} = J(\alpha \cdot \mathcal{X}_{\mathbb{N}}) \in J(S).$$

- β **separa pontos de** K**:** sejam $x, y \in K, x \neq y$. Como K é totalmente desconexo, existem abertos A e B tais que $x \in A, y \in B, A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = K$. Como A é aberto e fechado (pois $A^c = B$ é aberto), segue que $A \in$ clopen(K). Como I é sobrejetora, existe $A_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $I(A_1) = A$. Tomando $\mathcal{X}_{A_1} \in S$ temos que

$$\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{I(A_1)} = J(\mathcal{X}_{A_1}) \in J(S) = \beta \text{ e}$$

$$\mathcal{X}_A(x) = 1 \neq 0 = \mathcal{X}_A(y)$$

pois $x \in A$ e $y \in B = A^c$.

- **No caso complexo** β **é fechado para conjugação complexa:** dada $f \in \beta$, existe $\varphi \in S$ tal que $f = J(\varphi)$. Digamos $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i}$. Como uma função característica só assume os valores 0 e 1, que são valores reais, temos $\mathcal{X}_A = \overline{\mathcal{X}_A}$ para todo conjunto A. Então

$$\begin{aligned}\overline{f} = \overline{J(\varphi)} &= \overline{\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{I(A_i)}} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i \mathcal{X}_{I(A_i)}} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{a_i}\,\overline{\mathcal{X}}_{I(A_i)} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} \mathcal{X}_{I(A_i)} = J\left(\sum_{i=1}^n \overline{a_i} \mathcal{X}_{A_i}\right) \in J(S) = \beta\end{aligned}$$

pois $\displaystyle\sum_{i=1}^n \overline{a_i} \mathcal{X}_{A_i} \in S$.

Provamos que todas as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass estão satisfeitas, portanto temos que $\beta = J(S)$ é denso em $C(K)$, isto é $\overline{J(S)} = C(K)$. Já vimos que $\widetilde{J}(\ell_\infty)$ é fechado em $C(K)$, logo

$$C(K) = \overline{J(S)} = \overline{\widetilde{J}(S)} \subseteq \overline{\widetilde{J}(\ell_\infty)} = \widetilde{J}(\ell_\infty) \subseteq C(K),$$

então $\widetilde{J}(\ell_\infty) = C(K)$. Portanto $\widetilde{J}$ é sobrejetora. Assim concluímos que $\widetilde{J}$ é um isomorfismo isométrico de ℓ_∞ em $C(K)$.

□

Observação 3.34 (a) Pela demonstração acima temos a informação adicional de que o compacto K do Teorema 3.22 é totalmente desconexo.

(b) A literatura usa normalmente a terminologia $\beta\mathbb{N}$ para o espaço compacto K do Teorema 3.22. Para justificar essa notação, citamos Albiac e Kalton[1, pág. 79]: '$\beta\mathbb{N}$ *é a compactificação de Stone-Cech de* $\mathbb{N}$ *munida da topologia discreta, isto é,* $\beta\mathbb{N}$ *é o único espaço compacto de Hausdorff contendo* $\mathbb{N}$ *como subespaço denso tal que todo operador linear e contínuo definido em* $\mathbb{N}$ *pode ser estendido a uma função contínua definida em* $\beta\mathbb{N}$'.

Mais uma aplicação interessante do Teorema de Stone-Weierstrass, (veja [1, Proposition 4.1.4]), cuja demonstração está essencialmente contida na demonstração do Teorema 3.22, é a seguinte:

Proposição 3.35 *Seja K um espaço topológico compacto totalmente desconexo. Então a coleção das funções simples que são contínuas (isto é, funções da forma $\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j}$ em que cada A_j é aberto e fechado) é densa em $C(K)$.*

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac e N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer Verlag, 2006.

[2] R. Alencar e G. Botelho, *Applications of the Stone Representation Theorem for Boolean Algebras to Banach Space Theory*, 48º Seminário Brasileiro de Análise. LNCC-Petrópolis, RJ, 1998.

[3] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[4] B. Brosowski e F. Deutsch, *An elementary proof of the Stone-Weierstrass theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981) 89-92.

[5] B. Brosowski e A. R. da Silva, *A Stone-Weierstrass Theorem for Certain Discontinuous functions*, Approx. Theory Appl. (N.S.) **13** (1997) 83-87.

[6] N. L. Carothers, *Real Analysis,* Cambridge University Press, 2000.

[7] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1990.

[8] N. Dunford e J. Schwartz, *Linear Operators*, Vol. I, Interscience, New York, 1958.

[9] D. G. Figueiredo, *Análise I*, 2.ed. Ed. LTC, 1996.

[10] R. Goldberg, *Methods of Real Analysis,* John Wiley & Sons, 1976.

[11] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo* , v 4. Ed. LTC, 1988.

[12] C. S. Hönig, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

[13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1998.

[14] H. E. Lacey, *The isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[15] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer 1996.

[16] A. Lins Neto, *Funções de uma Variável Complexa*, Rio de Janeiro: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.

[17] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[18] C. R. Oliveira, *Introdução à Análise Funcional*, Rio de Janeiro: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

[19] J. B. Prolla, *On the Weierstrass-Stone theorem*, J. Approx. Theory **78** (1994) 299-313.

[20] V. Runde, *A Taste Of Topology,* Springer, 2005.

[21] J. S. Santos, *Resultados de Coincidência para Aplicações Absolutamente Somantes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Paraíba, 2008.

[22] K. Saxe, *Beginning Functional Analysis,* New York: Springer, 2002.

[23] G. F. Simmons, *Introduction to Topology an Modern Analysis,* McGraw-Hill, 1963.

[24] M. H. Stone, *Aplications of the theory of boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) 375-481.

[25] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[26] S. Willard, *General Topology,* Dover Publications, INC, 2004.

[27] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts,* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.