Alessandro Alves Santana

Geometria Analítica

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE UBERLÂNDIA

2013

Santana, Alessandro Alves

Geometria Analítica / Alessandro Alves Santana. Uberlândia, MG:UFU,2013
119p.

Licenciatura em Matemática

1. Geometria Analítica

Edição
Centro de Educação a Distância
Comissão Editorial - CEAD/UFU

Diagramação
Equipe CEAD/UFU

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Dilma Vana Rousseff

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Aloizio Mercadante

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Elmiro Santos Resende

VICE-REITOR
Eduardo Nunes Guimarães

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E REPRESENTANTE UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
José Benedito de Almeida Júnior

FACULDADE DE MATEMÁTICA - FAMAT - UFU
DIRETOR
Luís Antônio Benedetti

COORDENADORA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - PARFOR
Prof. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Alves Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Jr.
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

Sumário

Informações

Prezado(a) aluno(a),

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ícones” que lhe ajudarão a identificar as atividades. Fique atento ao significado de cada um deles. Isso facilitará a sua leitura e seus estudos.

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa não criamos um glossário, mas se houver dificuldade interaja no Fórum de Dúvidas.

Sobre o autor

Alessandro Alves Santana é licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), mestre em Matemática Computacional pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP), e doutor em Matemática Aplicada pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Desde 2006 é professor junto à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia (FAMAT-UFU). Tem grande interesse pelas seguintes áreas do conhecimento: Matemática Computacional, Computação Científica, Linux, Software Livre, Problemas Inversos, Psicologia, Geografia e História.

Sobre o curso

A Matemática é uma ciência que nasceu da necessidade que o homem tinha de resolver problemas, e vem se desenvolvendo e aprimorando ao longo dos tempos. Produz técnicas analíticas e numéricas que são empregadas por engenheiros na criação, desenvolvimento e aprimoramento tecnológico de vários produtos. O mundo como o conhecemos hoje não seria possível sem a Matemática. Não teríamos carros, aviões, celulares, computadores, televisões, aparelhos médicos, etc. Dessa forma, essa nobre ciência é uma parte essencial das engrenagens que fazem a sociedade evoluir. Assim sendo, o profissional da área de Matemática é um elemento fundamental para o desenvolvimento tecnológico e portanto sócio-econômico de qualquer sociedade.

Nesse contexto, é de suma importância o processo de formação de profissionais que vão atuar na área de Matemática. Essa tarefa é desempenhada pelas instituições de ensino superior. O processo de formação em um curso superior de Matemática envolve a aquisição de vários conhecimentos. Para facilitar a assimilação destes, o curso é divido em várias disciplinas. Uma dessas displinas é a **Geometria Analítica**. Em essência, essa disciplina é a fusão da Álgebra com a Geometria. Explicando de um modo mais simples, consiste no estudo da geometria através da representação algébrica de elementos geométricos, tais como retas, parábolas, elipses, planos, etc. A presente disciplina, para facilitar o entendimento, é dividida em quatro módulos:

- Sistemas de coordenadas;
- Retas no plano;
- Vetores no plano;
- Vetores no espaço.

Como fator motivador para o estudo da Geometria Analítica, é importante ressaltar que a interdisciplinaridade da Geometria Analítica com outras disciplinas é grande. No Cálculo Integral e Diferencial, por exemplo, a integração de determinadas funções de duas variáveis é facilitada através de uma mudança no sistema de coordenadas, assunto que será abordado em Geometria Analítica. Colocando mais um exemplo, temos ainda a delimitação de regiões de integração no espaço, com as referidas regiões sendo limitadas por cilindros, planos, parabolóides, esferas, etc. Esses aspectos, além de muitos outros que não foram citados, servem de motivação para o estudo de tal disciplina.

O tempo de cada módulo é de quinze dias. O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos. Ao final de cada módulo serão apresentados outros exercícios de fixação de conteúdo estudado.

Quanto à metodologia, o curso seguirá com a seguinte base: estudo da teoria do livro texto, com o treino através dos exercícios contidos no mesmo, e atividades dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) que serão passados para os alunos dentro do período de vigência de cada módulo, e que farão parte do processo de avaliação, assim como as provas presenciais.

Quanto ao sistema de avaliação, serão distribuídos 100 pontos, sendo 80 pontos provas escritas em modo presencial e 20 pontos nas atividades passadas, através de listas de exercícos, pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), sendo 5 pontos por módulo.

Quanto ao cronograma, as 60 horas do curso são distribuídas nos módulos de acordo com o número de semanas, considerando 4 horas de atividades de estudo da teoria por semana, sendo necessário considerar para cada hora de estudo em teoria pelo menos uma hora de estudo com exercícios. Esse esquema tem por finalidade assegurar um treino mínimo nos módulos.

Desejamos ao caro aluno um ótimo curso, e torço para que atinja com sucesso os objetivos da disciplina.

Grande abraço
Alessandro

Anotações

Módulo 1
Sistema de Coordenadas

O que é um sistema de coordenadas ?

Em essência, um SISTEMA é um conjunto de regras com uma finalidade bem específica. Por exemplo, todo banco tem um conjunto de regras que tem por finalidade gerenciar operações financeiras. Todo exército tem um conjunto de regras que definem as funções de cada posto (sargento, capitão, coronel, etc.) e as relações de hierarquia entre cada um deles. Em geometria analítica, um SISTEMA DE COORDENADAS é um conjunto de regras que tem por finalidade fornecer a localização ou posicionamento de pontos, seja no plano ou no espaço.

Como são estabelecidas essas regras de localização de pontos ?

Você já viu que é muito comum as pessoas pedirem referências quando precisam ir a um lugar que nunca foram? Por exemplo, a cidade de Uberlândia fica a aproximadamente 100 Km ao norte da cidade de Uberaba. Um outro exemplo, a oficina mecânica fica na Avenida Floriano Peixoto entre a Rua Duque de Caxias e a Rua Olegário Maciel. Pois bem, em geometria analítica é a mesma coisa. Para estabelecer regras de posicionamento é necessário estabelecer REFERÊNCIAS.

Nesse caso, que referências são utilizadas para posicionar ou localizar pontos ?

Isso depende de dois fatores. Se estivermos trabalhando em um PLANO, precisamos de DUAS REFERÊNCIAS, e se estivermos no ESPAÇO, precisamos de TRÊS REFERÊNCIAS. Em ambos os casos, essas referências são os chamados EIXOS COORDENADOS. Normalmente, tais eixos são retas que se interceptam em um ponto O, chamado de ORIGEM, e são todas PERPENDICULARES (formam um ângulo de 90 graus) entre si.

Como são esses eixos coordenados no caso do plano?

Esses eixos coordenados são formados por duas retas perpendiculares entre si que se interceptam em um ponto O (origem). Esse plano recebe o nome PLANO CARTESIANO. A primeira reta é horizontal e é chamada de eixo x. A segunda reta é vertical e é chamada de eixo y. A figura 1.1 ilustra esses eixos.

Observo que esses eixos dividem o plano em 4 regiões. Essas regiões recebem algum nome específico?

Sim. Essas regiões são chamadas QUADRANTES, e são enumeradas no sentido anti-horário, contando a partir do quadrante superior direito, conforme figura 1.2.

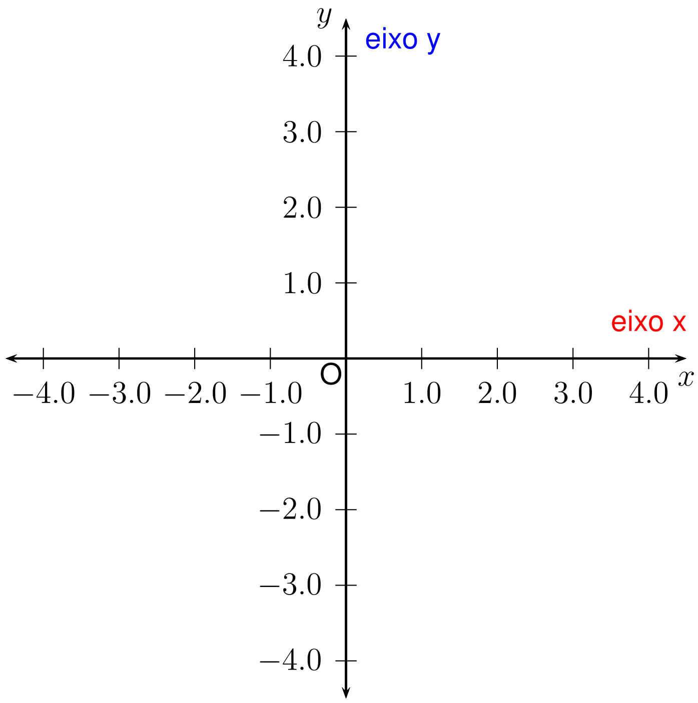


FIGURA 1.1: Eixos coordenados no plano.

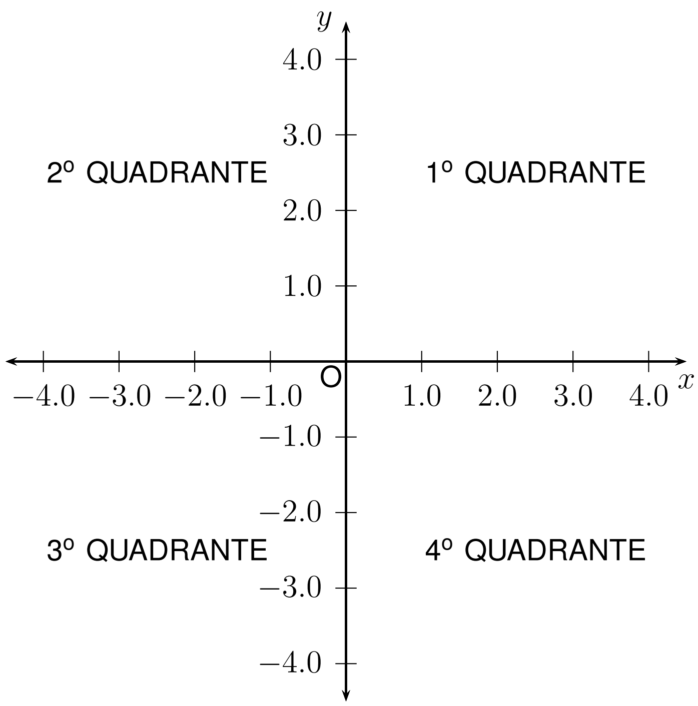


FIGURA 1.2: Localização e enumeração dos quadrantes.

Como localizo ou posiciono um ponto no plano cartesiano?

Um ponto é localizado ou posicionado no plano de acordo com as chamadas COORDENADAS CARTESIANAS. No caso do plano, as coordenadas de um dado ponto P são indicadas por $P(x, y)$. Nessa notação, as coordenadas da origem O são dadas por $O(0, 0)$, e é o ponto de referência inicial para localizar ou posicionar qualquer ponto no plano cartesiano. Observe que o ponto O divide tanto o eixo x como o eixo y em duas semi-retas, com sinais contrários tanto para x como y.

Como localizo os pontos de coordenadas $A(2, 3)$, $B(-3, 2)$ e $C(-2, -3)$ no plano cartesiano ?

Para localizar o ponto $A(2, 3)$, observando a figura 1.3, temos que andar, a partir da origem, duas unidades no sentido positivo (veja seta vermelha) do eixo x e depois três unidades no sentido positivo do eixo y em uma direção paralela ao mesmo (veja seta azul). Para localizar o ponto $B(-3, 2)$, observando a figura 1.4, temos que andar, a partir da origem, três unidades no sentido negativo (veja seta vermelha) do eixo x e depois duas unidades no sentido positivo do eixo y em uma direção paralela ao mesmo (veja seta azul). Para localizar o ponto $C(-2, -3)$, observando a figura 1.5, temos que andar, a partir da origem, duas unidades no sentido negativo (veja seta vermelha) do eixo x e depois três unidades no sentido negativo do eixo y em uma direção paralela ao mesmo (veja seta azul).

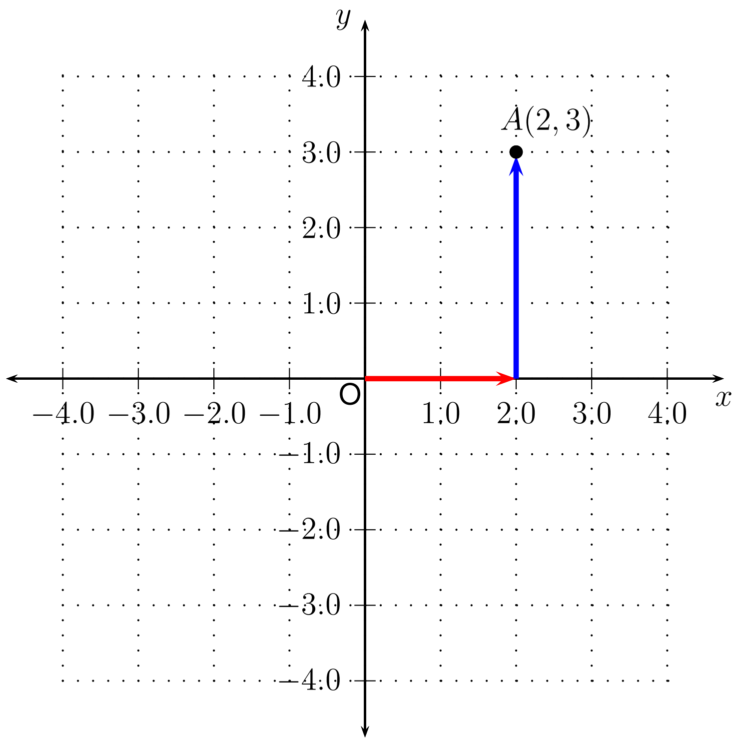


FIGURA 1.3: Localização do ponto de coordenadas $A(2, 3)$.

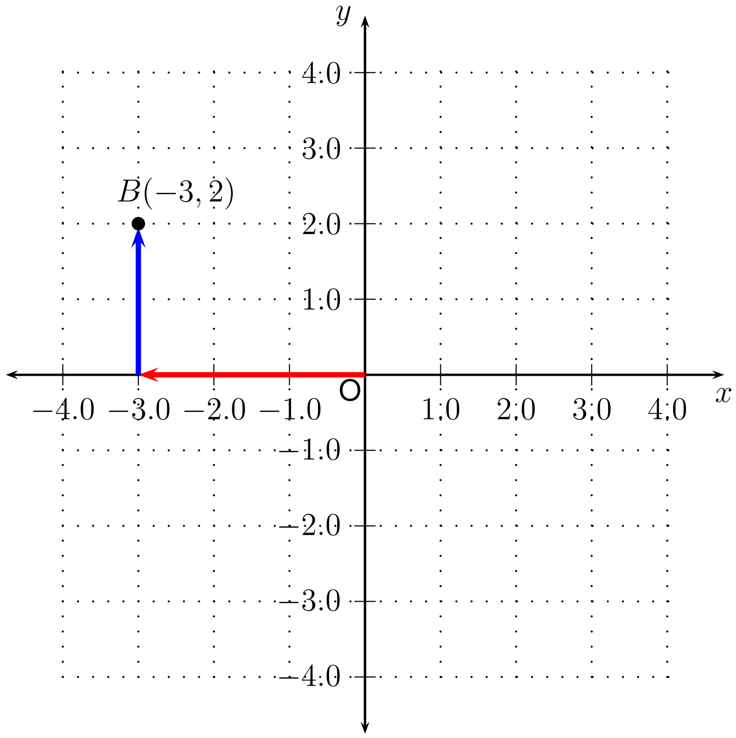


FIGURA 1.4: Localização do ponto de coordenadas $B(-3, 2)$.

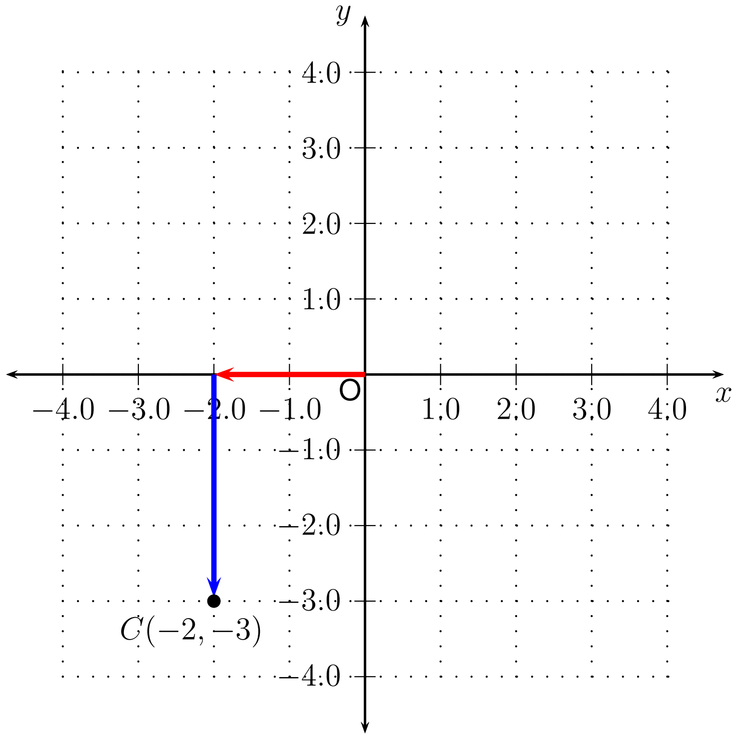
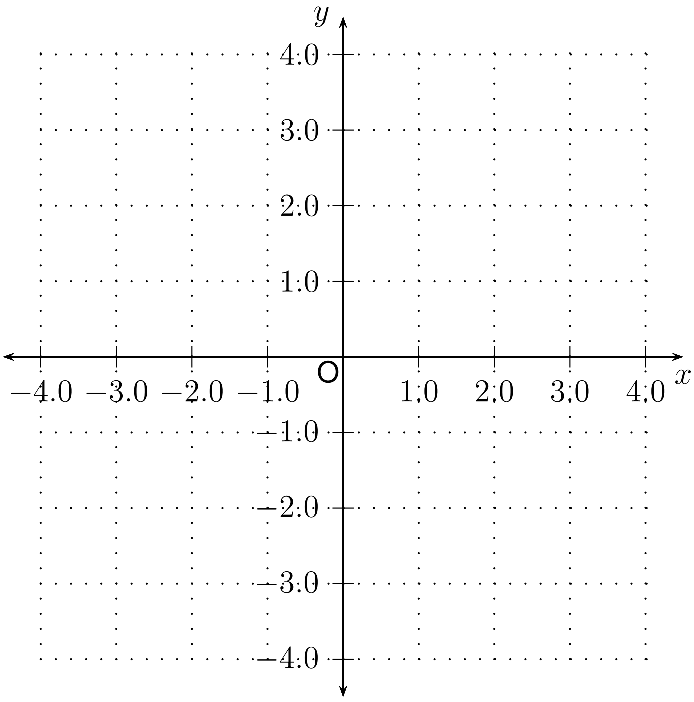


FIGURA 1.5: Localização do ponto de coordenadas $C(-2, -3)$.

Exercícios

1) Localize os pontos de coordenadas $A(4,2)$, $B(-3,4)$, $C(-2,-3)$ e $D(3,-4)$ no plano abaixo.



2) Para cada item abaixo, ligue os pontos na ordem em que se apresentam (use uma régua) e fale que polígono eles formam. Note que, para cada item, você terá que ligar o último ponto ao primeiro para formar um polígono.

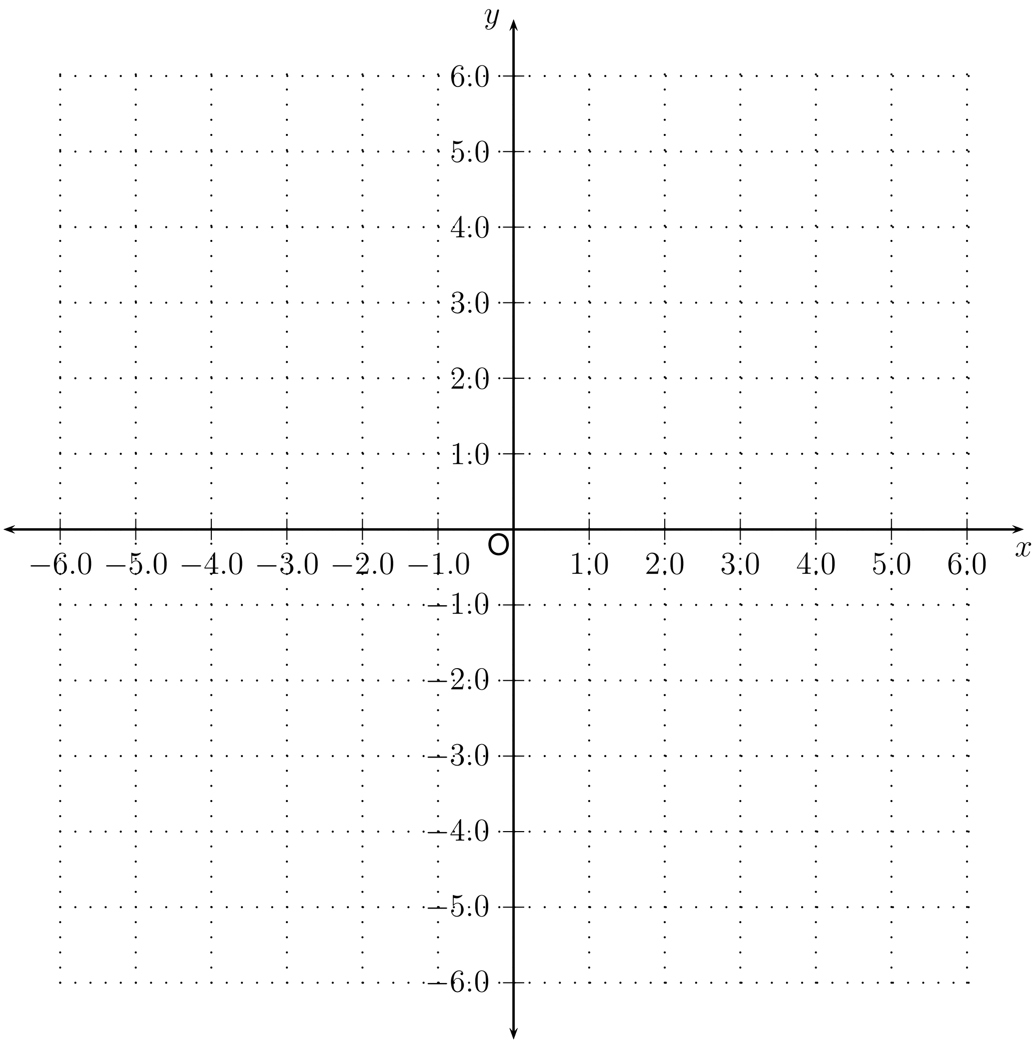
a) $A_1(1,2)$, $A_2(6,2)$, $A_3(6,6)$ e $A_4(2,6)$;

b) $B_1(-2,0)$, $B_2(0,2)$, $B_3(-5,6)$ e $B_4(-6,6)$;

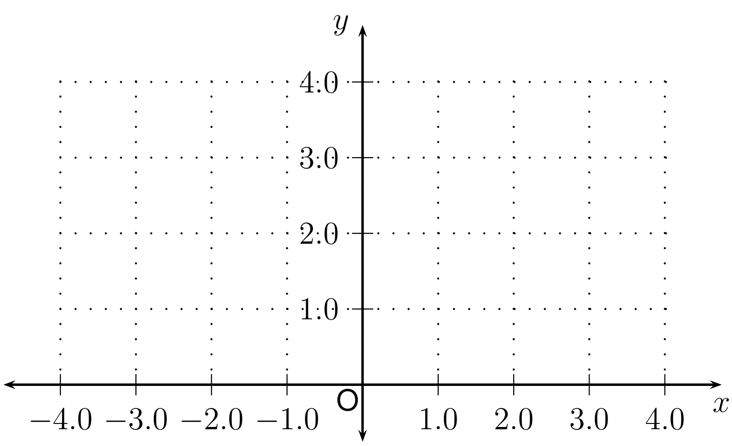
c) $C_1(-3,0)$, $C_2(-5,-5)$ e $C_3(-1,6)$;

d) $D_1(6,-2)$, $D_2(6,-6)$ e $D_3(2,-6)$.

Utilize o plano desenhado na próxima página para resolver esse exercício.



3) Localize os pontos de coordenadas $A(-2,1)$, $B(4,1)$ e $C(1,4)$ no plano desenhado abaixo. Sabendo da geometria euclidiana que a área de um triângulo é metade do produto da medida da base b pela medida da altura h, isto é, $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{bh}{2}$, calcule a área do triângulo formado pelos pontos dados. Para calcular a medida da base e da altura utilize uma régua.



O sistema de coordenadas apresentado tem algum nome específico ?

Sim. É chamado SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS. No caso do plano, que é um caso BIDIMENSIONAL, pois tem duas dimensões, utilizamos dois parâmetros, x e y, para localizar um dado ponto no plano cartesiano. Existe também sistema de coordenadas cartesianas para o caso espacial, que é um caso TRIDIMENSIONAL, pois tem três dimensões. Para localizar um ponto no espaço utilizamos três parâmetros, x, y e z. Dessa forma, representamos pela notação $P(x, y, z)$ as coordenadas de um ponto P no espaço.

Voltando à questão dos eixos coordenados, como são esses eixos no caso espacial?

Os eixos coordenados são formados por três retas perpendiculares entre si que se interceptam em um ponto O (origem). As duas primeiras retas, que formam os eixos x e y, estão contidas em um mesmo plano. Além disso, tem ainda a terceira reta, que forma o chamado eixo z, e é perpendicular simultaneamente aos eixos x e y. A figura 1.6 ilustra esses eixos. Cada par de eixos define um plano, a saber, planos xy, yz e xz. Esses planos dividem o espaço em 8 regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de OCTANTE.

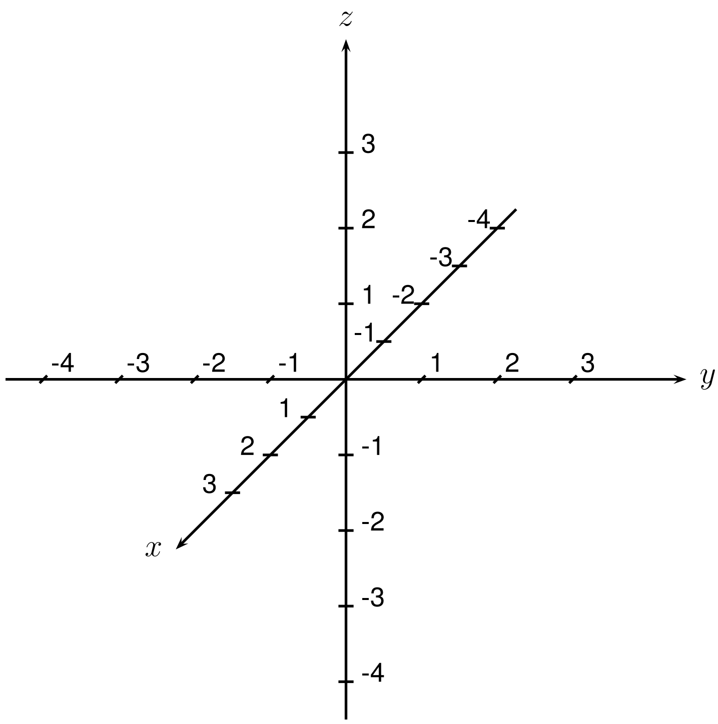


FIGURA 1.6: Coordenadas cartesianas no espaço.

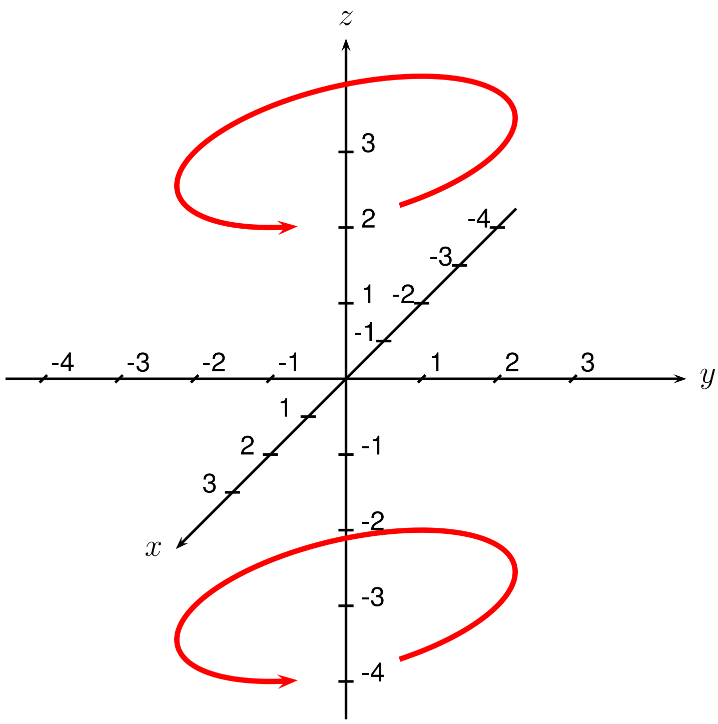


FIGURA 1.7: Octantes e sua enumeração dadas pelos sentidos das setas.

Não consigo visualizar corretamente a localização dos octantes. Há alguma outra forma de visualizá-los ?

Sim. Para saber em qual octante um dado ponto $P(x, y, z)$ se localiza basta observar os sinais de x, y e z, conforme a tabela 1.1.

x	y	z	octante
+	+	+	1º
-	+	+	2º
-	-	+	3º
+	-	+	4º
+	+	-	5º
-	+	-	6º
-	-	-	7º
+	-	-	8º

TABELA 1.1: Posicionamento dos pontos nos octantes de acordo com os sinais de x, y e z.

Os eixos coordenados da figura 1.6 são mesmo perpendiculares entre si ?

Sim, embora não pareça. Perceba que antes que as figuras fossem apresentadas ao caro aluno, foi afirmado que os eixos x, y e z são todos perpendiculares entre si. A dificuldade que as pessoas tem em visualizar, desenhos que representam figuras tridimensionais, reside no fato de que tais desenhos são feitos em planos. Devido a isso, surge a necessidade de uma forma de apresentação como a que foi feita, com afirmações prévias sobre a perpendicularidade dos referidos eixos.

As coordenadas cartesianas x, y e z de um ponto recebem algum nome especial ?

Sim. Vejamos as situações:

- Se $P(x, y)$ é um ponto do plano cartesiano, as variáveis x e y são chamadas, respectivamente, PRIMEIRA COORDENADA e SEGUNDA COORDENADA. Ainda no caso do plano, x e y também são chamadas, respectivamente, ABSCISSA e ORDENADA.

- Se $P(x, y, z)$ é um ponto do espaço, as variáveis x, y e z são chamadas, respectivamente, PRIMEIRA COORDENADA, SEGUNDA COORDENADA e TERCEIRA COORDENADA. Além disso, podem também serem chamadas, respectivamente, ABSCISSA, ORDENADA e COTA.

De onde vem o termo coordenadas cartesianas?

Esse nome se deve ao matemático, filósofo e físico francês chamado RENÉ DESCARTES. Nasceu na França, na cidade de La Haye en Touraine, no dia 31 de março de 1596, e morreu Estocolmo na Suécia no dia 11 de fevereiro de 1650. Ele obteve reconhecimento por sugerir a fusão da ÁLGEBRA com a GEOMETRIA, o que gerou a GEOMETRIA ANALÍTICA e o SISTEMA DE COORDENADAS com que hoje trabalhamos e leva seu nome. A palavra CARTESIANA vem de seu sobrenome, Descartes. Uma pintura dele está mostrada na figura 1.8.

FIGURA 1.8: René Descartes.

Como posso localizar pontos no espaço ?

De modo similar às coordenadas cartesianas no plano, um ponto é localizado ou posicionado no espaço também em termos de COORDENADAS CARTESIANAS. No caso do espaço, as coordenadas de um dado ponto P são indicadas por $P(x, y, z)$. Nessa notação, as coordenadas da origem O são dadas por $O(0, 0, 0)$, e é o ponto de referência inicial para localizar ou posicionar qualquer ponto no espaço. Observe que o ponto O divide cada um dos três eixos em duas semi-retas, com sinais contrários em x, y e z, conforme a figura 1.6, já apresentada anteriormente.

Como localizo os pontos de coordenadas $\boldsymbol{A(2, 3, 2)}$ e $\boldsymbol{B(3, -2, -3)}$ no espaço ?

- Perceba que o ponto $A(2, 3, 2)$ está no primeiro octante, pois as três coordenadas são todas positivas (observe a tabela 1.1). Nesse caso, observando a figura 1.9, a partir da origem temos que andar duas unidades no sentido positivo do eixo x (veja a seta vermelha). Depois, temos que andar três unidades no sentido positivo (veja a seta azul) do eixo y, em uma direção paralela à mesma. Por último, temos que andar duas unidades no sentido positivo do do eixo z (veja a seta verde), em uma direção paralela a este último eixo. Com isso, chegamos à localização do ponto $A(2, 3, 2)$ no espaço.

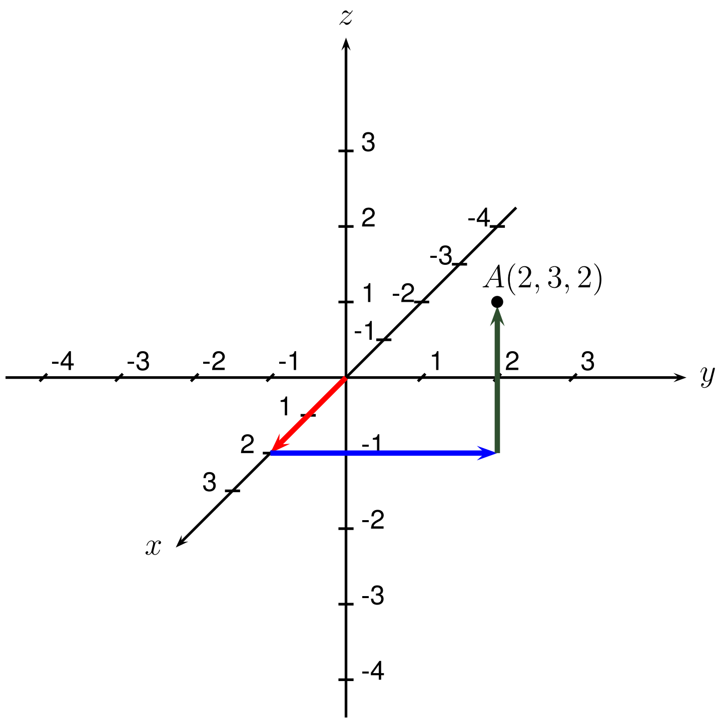


FIGURA 1.9: Coordenadas cartesianas no espaço.

- Perceba que o ponto $B(3, -2, -3)$ está no oitavo octante, pois a primeira coordenada é positiva e as demais negativas (observe a tabela 1.1). Nesse caso, observando a figura 1.10, a partir da origem temos que andar três unidades no sentido positivo do eixo x (veja a seta vermelha). Depois, temos que andar duas unidades no sentido negativo (veja a seta azul) do eixo y, em uma direção paralela à mesma. Por último, temos que andar três unidades no sentido negativo do do eixo z (veja a seta verde), em uma direção paralela a este último eixo. Com isso, chegamos a localização do ponto $B(3,-2,-3)$.

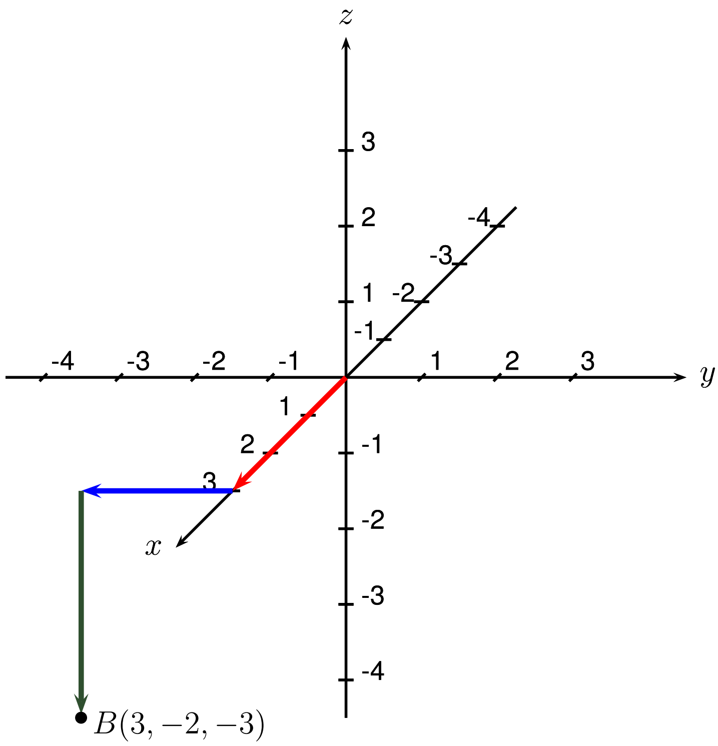


FIGURA 1.10: Coordenadas cartesianas no espaço.

Exercícios

1) Localize, utilizando o sistema de eixos apresentado na figura da próxima página, os pontos de coordenadas $A(4,4,1)$, $B(-4,4,1)$, $C(-4,-4,1)$, $D(4,-4,1)$, $E(4,4,-1)$, $F(-4,4,-1)$, $G(-4,-4,-1)$, $H(4,-4,-1)$ utilizando o sistema de eixos coordenados.

2) Considerando o exercício anterior no mesmo sistema de eixos, ligue os pontos localizados na seguinte ordem

   a) $A \to B \to C \to D \to A$;

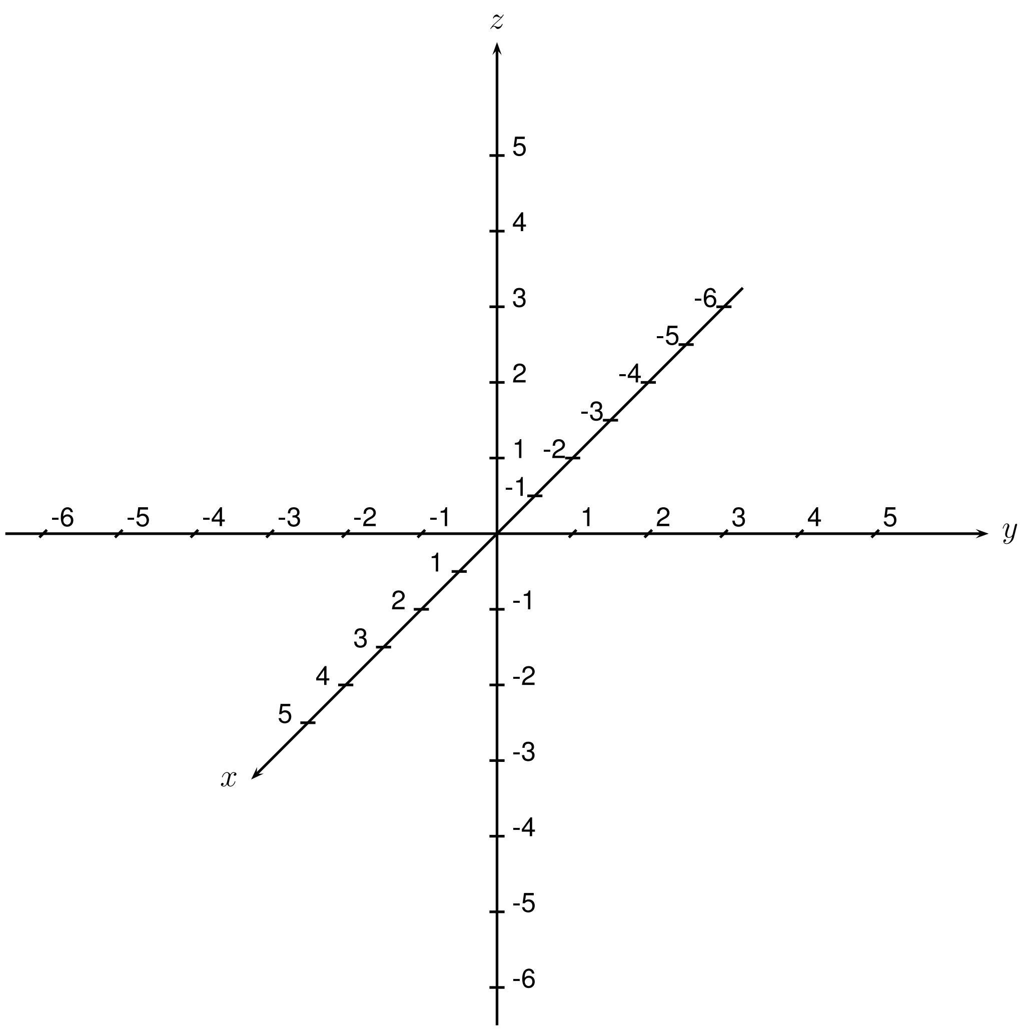
   b) $A \to E$;

   c) $B \to F$;

   d) $C \to G$;

   e) $D \to H$.

   e responda que figura geométrica foi obtida ao ligar os pontos ?


z
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
y
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
-6

Além do sistema de coordenadas cartesianas, existem outros sistemas de coordenadas ?

Boa pergunta. Sim, existem outros sistemas de coordenadas, tanto para o plano como para o espaço. No caso do plano, existe o chamado SISTEMA DE COORDENADAS POLARES. No caso espacial, existe o SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS e o SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS.

Como funciona o sistema de coordenadas polares ?

O SISTEMA DE COORDENADAS POLARES é um sistema para localização de pontos no plano. Enquanto que no sistema de coordenadas cartesianas utilizamos os parâmetros x e y para localizar pontos no plano, no sistema de coordenadas polares utilizamos um parâmetro radial r, costumeiramente chamado RAIO, e um parâmetro angular θ. Dessa forma, se em coordenadas cartesianas utilizamos a notação $P(x, y)$ para representar as coordenadas do ponto P nesse último sistema de coordenadas, em coordenadas polares utilizamos a notação $P(r, \theta)$.

Estou um pouco confuso. Nessa notação, a representação para coordenadas cartesianas e polares são iguais. Como vou saber se as coordenadas de um ponto estão em coordenadas cartesianas ou polares ?

Nada de preocupação. No texto desse curso utilizaremos como padrão o SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS. Caso seja utilizado qualquer outro sistema, seja para o plano ou espaço, o mesmo será informado.

Como faço para localizar um ponto em coordenadas polares no plano ?

É muito simples. Sejam $P(r, \theta)$ as coordenadas do ponto P, o qual está em coordenadas polares. Observe a figura 1.11 para entender a explicação a seguir. O ponto P em coordenadas polares é localizado no plano, andando, a partir da origem, r unidades sobre o eixo x no sentido positivo do mesmo (veja a seta em vermelho). Depois, basta rotacionar θ radianos (ou graus), MANTENDO O RAIO r, no sentido anti-horário (veja a seta em azul). Pronto, localizamos no plano o ponto $P(r, \theta)$ usando coordenadas polares.

OBSERVAÇÃO

Na figura 1.11, o valor da medida do ângulo θ no arco contínuo e no arco tracejado É O MESMO. Basta lembrar que ângulo é uma medida de abertura.

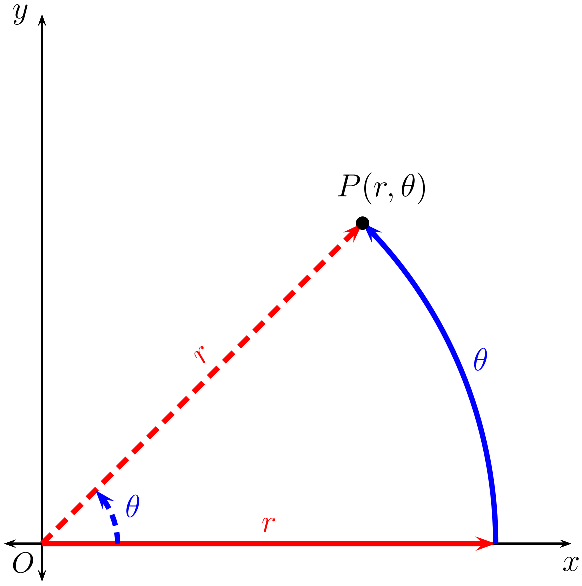


FIGURA 1.11: Sistema de coordenadas polares.

Qual é a localização no plano cartesiano dos pontos $A(4, \frac{\pi}{3})$ e $B(4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ que estão em coordenadas polares ?

A figura 1.12 mostra a localização dos pontos solicitados no plano cartesiano.

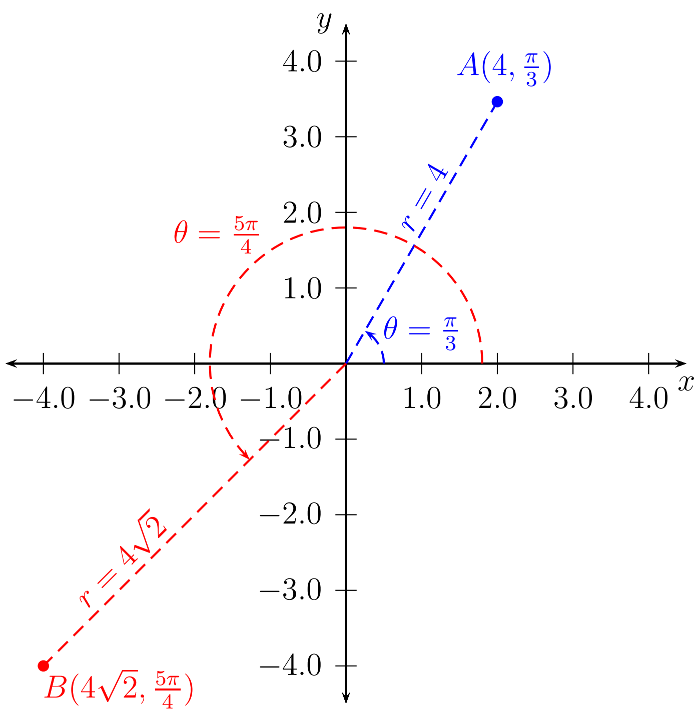


FIGURA 1.12: Localização dos pontos em coordenadas polares.

É possível determinar as coordenadas cartesianas de um ponto a partir das coordenadas polares?

Sim. Observe a figura 1.13 e veja que a partir do r e θ podemos obter x e y, respectivamente, pelas relações $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$. Essas relações foram obtidas simplesmente usando relações trigonométricas no triangulo retângulo que aparece na figura.

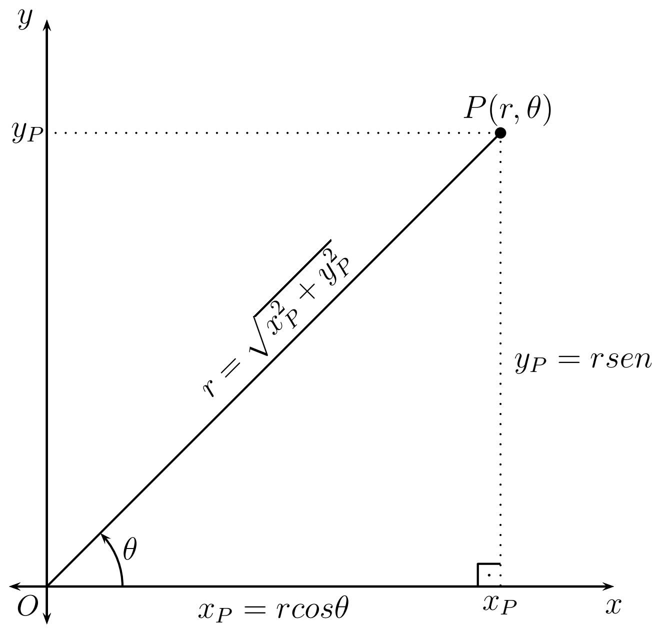


FIGURA 1.13: Conversão entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares.

Obtenha as coordenadas cartesianas de um ponto que está em coordenadas polares.

Seja que $P(2, \frac{\pi}{3})$ um ponto que está em coordenadas polares. Vamos determinar então as coordenadas cartesianas desse ponto. Observando as coordenadas do ponto em questão, temos que $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Note que o ângulo θ está em radiano. Para obter a medida do ângulo em graus, basta utilizar a fórmula

$$\theta_g = \frac{180 \times \theta_r}{\pi}$$

onde θ_g e θ_r são, respectivamente, a medida do ângulo em graus e em radiano. Usando a fórmula acima com $\theta_r = \frac{\pi}{3}$, temos que $\theta_g = 60°$ graus. Agora, falta então obter x e y. Continuando, temos que

$$\begin{cases} x = rcos\theta_g = 2cos(60°) = 1 \\ y = rsen(\theta_g) = 2sen(60°) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Assim sendo, as coordenadas cartesianas do ponto dado são dadas por $P(1, \sqrt{3})$.

Preciso sempre passar o ângulo θ para graus ?

Não. A conversão foi feita por motivo didático, isto é, para facilitar o entendimento. Se você não tiver problemas para trabalhar com o ângulo em radianos, então não converta.

É possível determinar as coordenadas polares de um ponto a partir das coordenadas cartesianas?

Sim. Para determinar r e θ a partir das coordenadas cartesianas x e y, basta aplicar as relações

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Obtenha as coordenadas polares de um ponto que está em coordenadas cartesianas.

Se $P(-\sqrt{3}, 1)$ é um ponto em coordenadas cartesianas, onde $x = -\sqrt{3}$ e $y = 1$, temos que o raio é dado por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Com relação ao cálculo do ângulo temos que tomar um certo cuidado. Note que $x = -\sqrt{3}$ é negativo e $y = 1$ positivo. Isso significa que ângulo θ está no segundo quadrante, e o ângulo θ tem que estar entre $\frac{\pi}{2}$ e π. Continuando,

$$\theta = arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Assim sendo, as coordenadas polares do ponto em questão são dadas por $P(2, \frac{5\pi}{6})$.

Exercícios

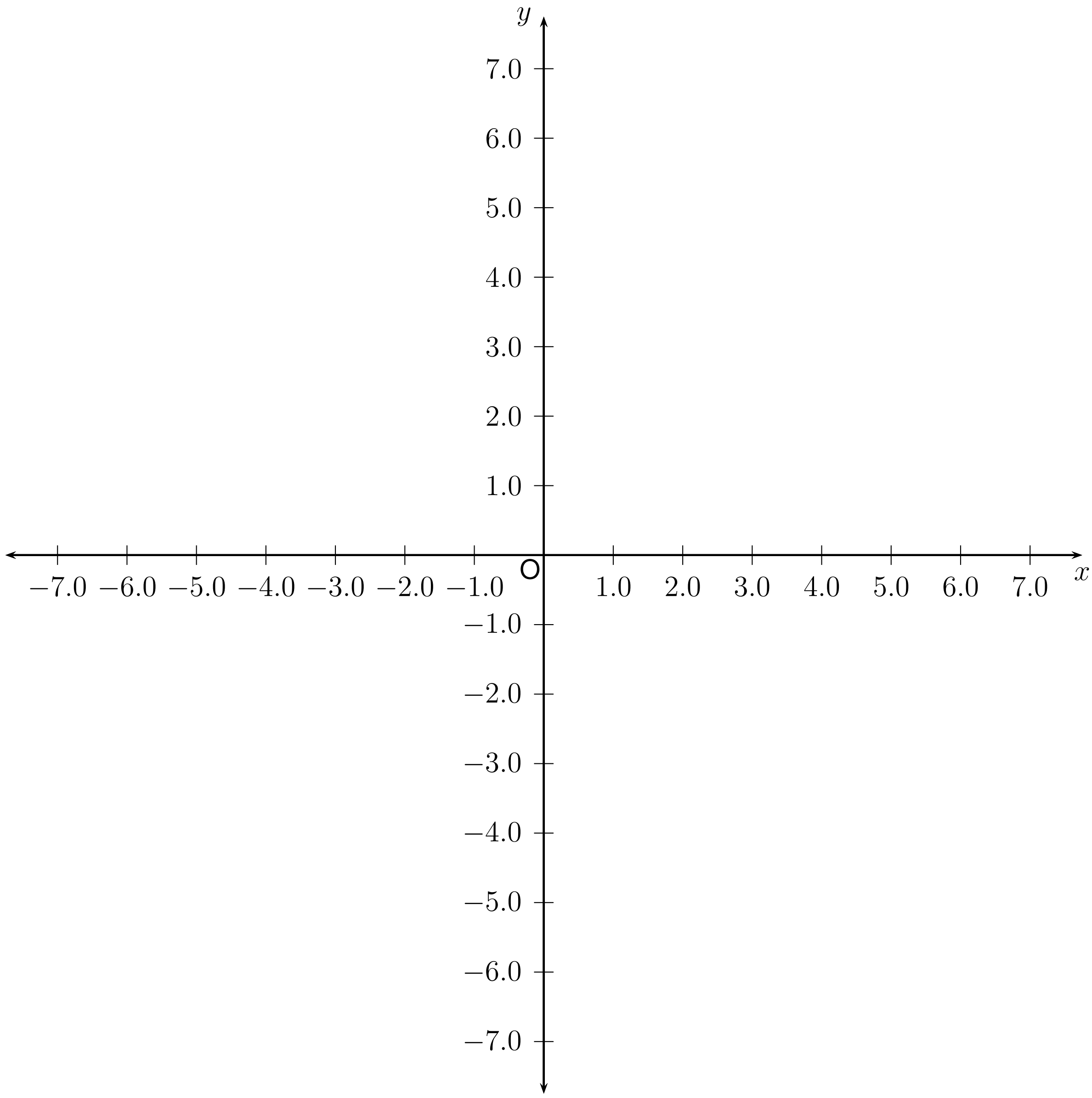
1) Com o auxílio de uma régua e um transferidor, localize os pontos, abaixo, que estão em coordenadas polares no plano cartesiano. Depois de localizados, obtenha as respectivas coordenadas cartesianas de cada ponto dado.

   a) $A(1, \frac{\pi}{6})$;

   b) $B(2, \frac{3\pi}{4})$;

   c) $C(3, \frac{4\pi}{3})$;

   d) $D(4, \frac{7\pi}{4})$.



Como funcionam as coordenadas cilíndricas?

Bom, vimos anteriormente que a localização de pontos no plano em coordenadas polares utiliza como parâmetros o raio r e o ângulo θ. Em se tratando de localização de pontos no espaço tri-dimensional, além das coordenadas cartesianas, podemos localizar pontos no espaço utilizando as chamadas COORDENADAS CILÍNDRICAS. Essas coordenadas utilizam os parâmetros r e θ, os mesmos que são empregados no sistema de coordenadas polares, e mais um parâmetro z. Dessa forma, um ponto no espaço em coordenadas cilíndricas é representado da seguinte forma: $P(r, \theta, z)$. A figura 1.14 ilustra como localizar um ponto P no espaço utilizando o referido sistema de coordenadas.

Como localizo um ponto no espaço que está em coordenadas cilíndricas ?

Acompanhe a explicação observando a figura 1.14. Para localizar um ponto $P(r, \theta, z)$, que está em coordenadas cilíndricas, primeiramente, a partir da origem, andamos ao longo do eixo x r unidades (veja a seta vermelha). Depois rotacionamos no sentido anti-horário dentro do plano xy, e mantendo o mesmo raio r, θ radianos (ou graus) (veja a seta azul). Por último, andamos z unidades em uma direção paralela ao eixo z (veja a seta verde).

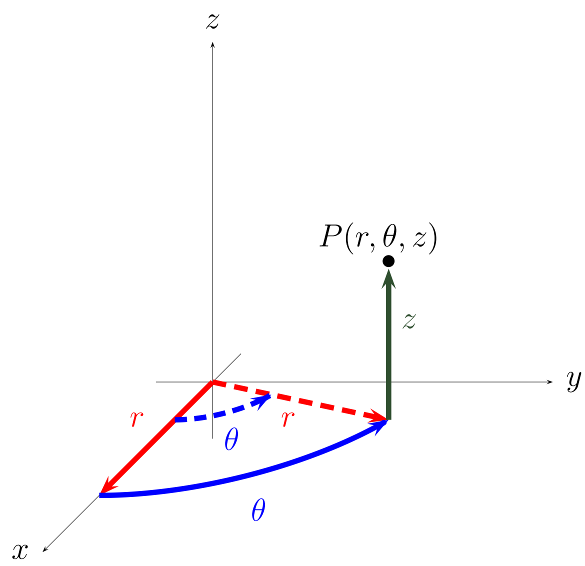


FIGURA 1.14: Coordenadas cilíndricas.

Posicione no espaço os pontos $A(4, \frac{\pi}{3}, 2)$ e $B(5, \frac{7\pi}{4}, -2)$, os quais estão em coordenadas cilíndricas.

A figura 1.17 mostra a localização dos pontos solicitados.

Como posso obter as coordenadas cartesianas de um ponto que está em coordenadas cilíndricas ?

Se $P(r, \theta, z)$ são pontos em coordenadas cilíndricas, a primeira coordenada cartesiana x é obtida calculando $x = rcos\theta$. A segunda coordenada cartesiana é obtida calculando $y = rsin\theta$. A Terceira coordenada cartesiana z é o próprio z. Note que sendo z o mesmo para os dois sistemas de coordenadas, o resto é igual ao processo utilizado para obter as coordenadas cartesianas a partir das coordenadas polares.

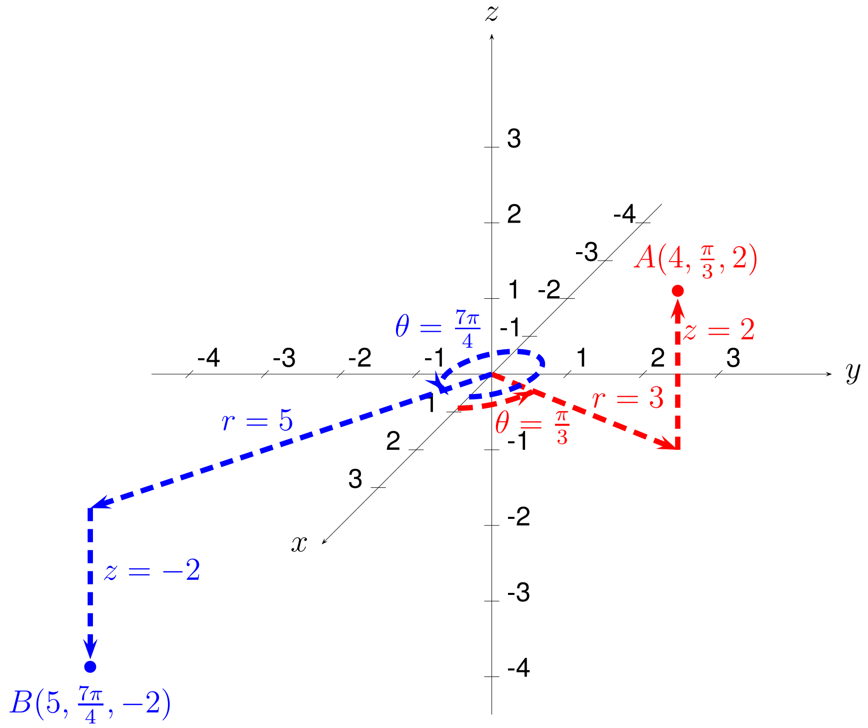


FIGURA 1.15: Exemplos de pontos localizados via coordenadas cilíndricas.

Se $P(2, \frac{\pi}{3}, 3)$ é um ponto que está em coordenadas cilíndricas, quais são as coordenadas desse ponto em coordenadas cartesianas ?

A conversão de coordenadas é fácil. Do ponto dado temos que $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($60°$ graus) e $z = 3$. Quanto a z não temos que fazer nada uma vez que entre os dois sistemas de coordenadas o valor de z é o mesmo. Temos que encontrar sim é x e y. Bom, calculando as coordenadas cartesianas, isto é, x e y, temos que

$$\begin{cases} x = rcos\theta = 2cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \\ y = rsen\theta = 2sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Exercícios

1) Os pontos a seguir estão em coordenadas cartesianas. Converta cada um desses pontos para coordenadas cilíndricas.

   a) $A(1, 1, 3)$;

   b) $B(1, \sqrt{3}, -2)$;

   c) $C(\sqrt{3}, 1, 1)$;

   d) $D(-2\sqrt{3}, 2, -1)$;

   e) $E(4, -4, 2)$;

   f) $F(-2, -2\sqrt{3}, 4)$.

2) Os pontos a seguir estão em coordenadas polares. Converta cada um desses pontos para coordenadas cartesianas.

   a) $A(2, \frac{\pi}{3}, 2)$;

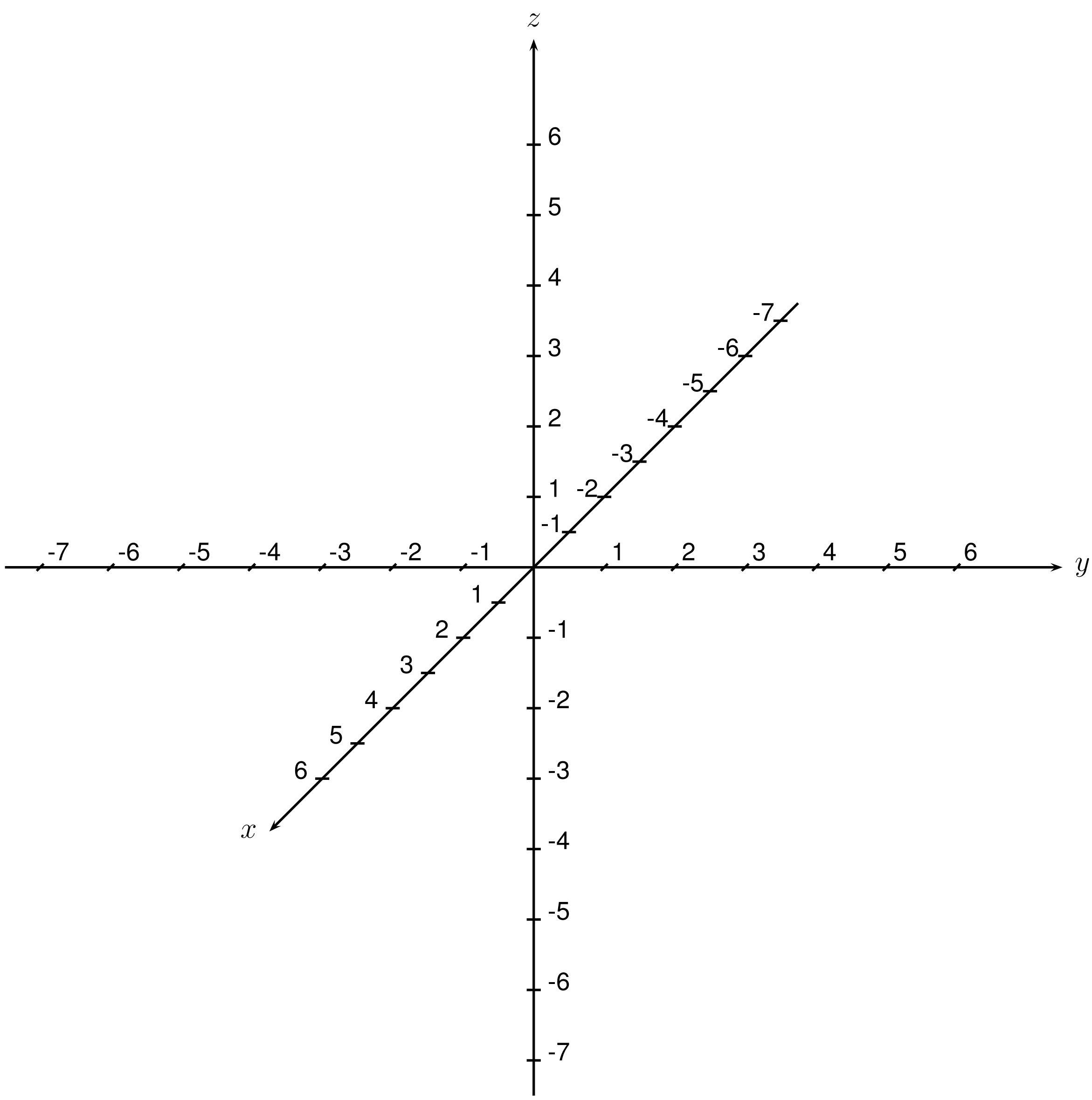
   b) $B(3, \frac{\pi}{2}, -1)$;

   c) $C(1, \pi, 1)$;

   d) $D(2, \frac{\pi}{6}, -2)$;

   e) $E(3, \frac{4\pi}{3}, 2)$.

3) Localize cada um dos pontos do exercício anterior no sistema de eixos abaixo.



4) Até o presente momento foram estudados vários tópicos dentro do programa da disciplina. Quais foram esses tópicos ? O que você aprendeu até o presente momento ?

Como funcionam as coordenadas esféricas?

O chamado sistema de COORDENADAS ESFÉRICAS é um sistema para ser empregado em coordenadas espaciais. O sistema de coordenadas esferícas emprega três parâmetros para localizar um ponto qualquer no espaço, a saber, ρ, ϕ e θ. Dessa forma, representamos um ponto no presente sistema de coordenadas da seguinte forma: $P(\rho, \phi, \theta)$.

Como localizo um ponto no espaço utilizando o sistema de coordenadas esféricas ?

Acompanhe a explicação fazendo observações na figura 1.16. Primeiramente, ande ρ unidades sobre o eixo z no sentido positivo desse eixo (veja a seta em vermelho). Em seguida, mantendo fixo o segmento de medida ρ, rotacione ϕ radianos (ou graus) no sentido anti-horário dentro do plano xz (veja a seta azul). Por último, rotacione θ radianos (ou graus) em torno do eixo z (veja a seta verde), mantendo fixo ρ e ϕ. Fazendo isso, irá chegar no ponto $P(\rho, \phi, \theta)$. Na figura utilizada, r é a projeção do segmento de medida ρ sobre o plano xy.

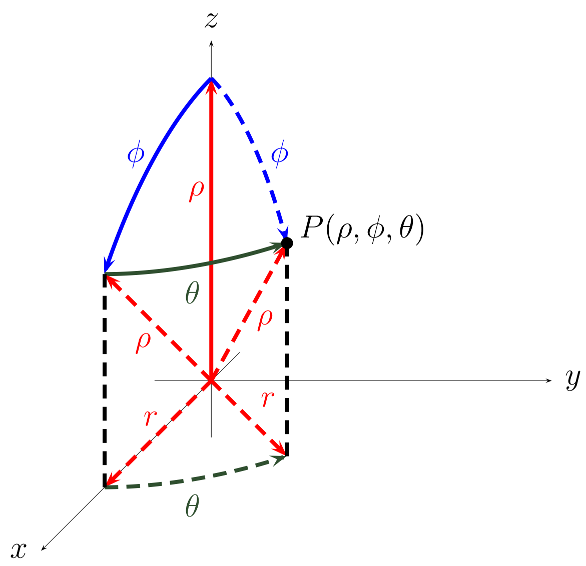


FIGURA 1.16: Coordenadas esféricas.

Como posso localizar o ponto $P(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ que está em coordenadas esféricas?

A figura 1.17 mostra a localização do ponto $P(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ que está em coordenadas esféricas. Note que $\rho = \sqrt{3}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

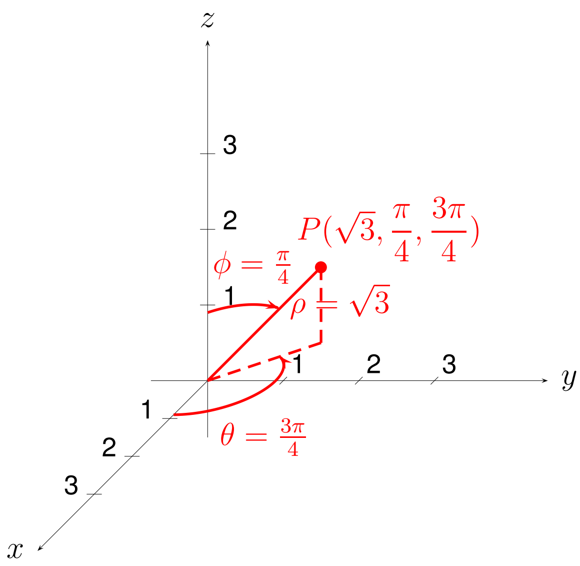


FIGURA 1.17: Exemplo de posicionamento de um ponto em coordenadas esféricas.

Como posso converter um ponto que está em coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas ?

Para obter as coordenadas cartesianas a partir das coordenadas esféricas, basta utilizar as fórmulas

$$\begin{cases} x = \rho sen\phi cos\theta \\ y = \rho sen\phi sen\theta \\ z = \rho cos\phi \end{cases}$$

Obtenha as coordenadas cartesianas do ponto $P(2, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ que está em coordenadas esféricas.

Do ponto dado temos que $\rho = 2$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ ($45°$ graus) e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ($135°$ graus). Bom, calculando as coordenadas cartesianas x, y e z temos que

$$\begin{cases} x = \rho sin\phi cos\theta = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \\ y = \rho sin\phi sen\theta = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right) sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ z = \rho cos\phi = 2cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Quais são as variações de ρ, ϕ e θ?

Bom, a variável ρ pode assumir qualquer valor real positivo. A variável ϕ pode variar de 0 a π. E por último, a variável θ pode variar de 0 a 2π.

Como posso calcular a distância entre dois pontos?

O processo para se calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano segue em essência o Teorema de Pitágoras. Observe a figura 1.18 e acompanhe o desenvolvimento em seguida.

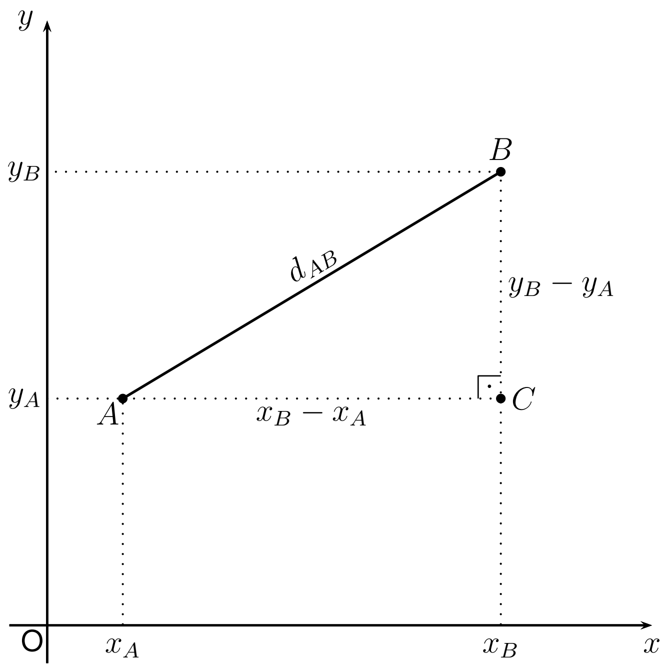


FIGURA 1.18: Distância entre dois pontos no plano.

Para obter a fórmula para calcular a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, basta formar um triângulo retângulo ΔABC, com ângulo reto em $C(x_C, y_C)$, e aplicar o Teorema de Pitágoras nesse retângulo. Seguindo esse raciocínio, temos que

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{CB}^2 \Rightarrow d_{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Como calculo a distância entre os pontos $A(-1, -2)$ e $B(2, 3)$?

Do ponto $A(-1, -2)$ temos que $x_A = -1$ e $y_A = -2$, e do ponto $B(2, 3)$ temos que $x_B = 2$ e $y_B = 3$. Aplicando a fórmula para o cálculo da distância, segue-se que

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{34}\, u.c.$$

Exercícios

1) Sabendo que o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados do mesmo, calcule o perímento do triângulo de vértices $A(-1,-1)$, $B(4,-2)$ e $C(2,2)$.

2) Sabe-se que um ponto da forma $P(x,0)$ é um ponto que está sobre o eixo x. Determine então o valor de x de tal forma que a distância desse ponto P ao ponto $Q(1,1)$ tenha 2 u.c. (unidades de comprimento). Sugestão: Resolva a equação $d_{QP} = 2$.

Como posso representar matematicamente o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ que distam igualmente de um ponto $C(x_C, y_C)$ fixo dado ?

Chamamos de CIRCUNFERÊNCIA o conjunto de todos os pontos do plano que distam igualmente de um ponto fixo dado. A essência para representar matematicamente uma circunferência é a fórmula da distância entre dois pontos. Vamos lá, seja r essa distância fixa, e seja $C(x_c, y_c)$ o referido ponto fixo, e seja $P(x,y)$ um ponto qualquer do plano cartesiano. Bom, um ponto $P(x,y)$ qualquer do espaço que dista r unidades do ponto fixo $C(x_C, y_C)$ tem que satisfazer a seguinte equação.

$$\sqrt{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, a equação se transforma em

$$(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = r^2.$$

Pois bem, essa é a chamada EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA ou simplesmente EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA. O ponto $C(x_C, y_C)$ é chamado CENTRO e r é chamado RAIO. Veja a ilustração de uma circunferência na figura 1.19.

Se achatarmos a circunferência, que figura geométrica será obtida ?

Nesse caso iremos obter o que chamamos de ELIPSE. Matematicamente falando, uma elipse é um conjunto de pontos $P(x,y)$ do plano cuja soma das distâncias deste a dois pontos fixos é sempre constante. Observe a figura 1.20. O que está sendo dito é que a soma das distâncias do ponto P aos pontos F_1 e F_2 é sempre a mesma. O valor da soma dessas distâncias é igual a $2a$, isto é,

$$d_{PF_1} + d_{PF_2} = 2a.$$

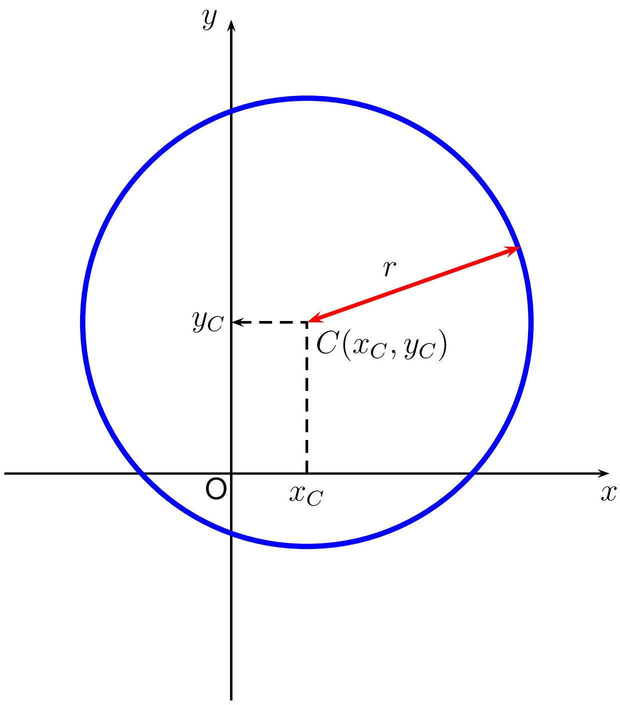


FIGURA 1.19: Circunferência centrada em $C(x_C, y_C)$ e raio r.

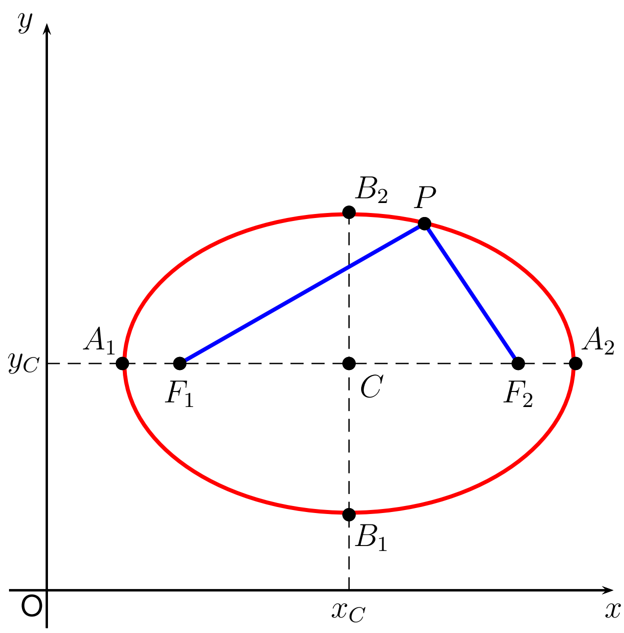


FIGURA 1.20: Elipse centrada em $C(x_C, y_C)$.

Quais são os elementos de uma elipse ?

Ainda observando a figura 1.20, temos que tais elementos são:

- C: É o CENTRO da elipse;
- F_1 e F_2: São chamados FOCOS;
- A_1, A_2, B_1 e B_2: São chamados VÉRTICES;
- $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$: São os EIXOS da elipse.

Qual é a equação que representa matematicamente uma elipse ?

A equação que representa uma elipse é dada por

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

onde $C(x_C, y_C)$ são as coordenadas do centro, a é a metade do comprimento do eixo $\overline{A_1A_2}$ (que é paralelo ao eixo x) e b a metade do comprimento do eixo $\overline{B_1B_2}$ (também paralelo ao eixo y). A figura 1.21 apresenta tais parâmetros.

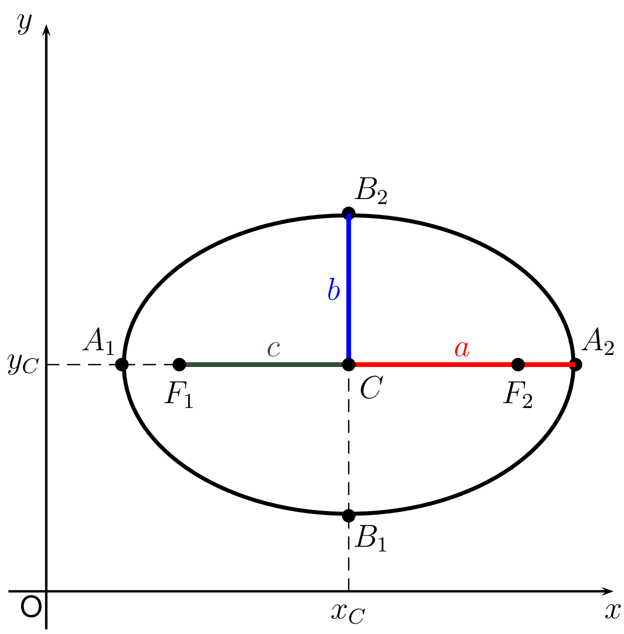


FIGURA 1.21: Parâmetros da elipse.

Como posso calcular o valor de c ?

Simples. Veja a figura 1.22. Perceba que o triângulo ΔCPF_1 é um triângulo retângulo, e podemos aplicar então o Teorema de Pitágoras para obter o valor de c. Basta resolver a equação $a^2 = b^2 + c^2$.

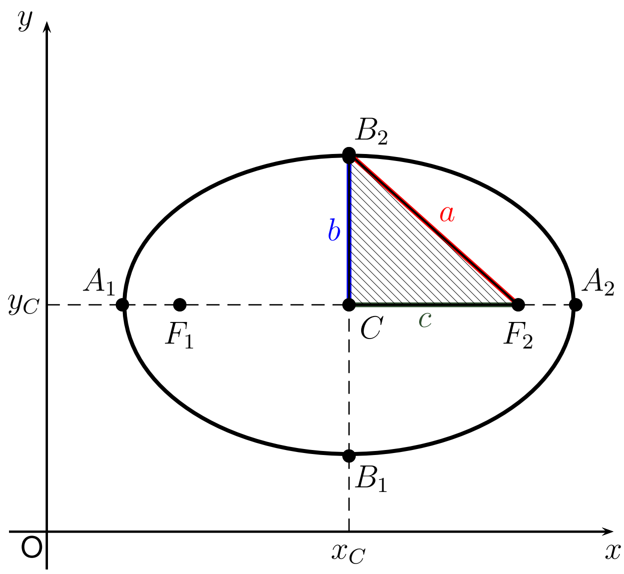


FIGURA 1.22: Cálculo da distância focal.

Nas figuras apresentadas a elipse tem o eixo maior paralelo ao eixo x. Se o eixo maior for paralelo ao eixo y, ocorre alguma mudança na forma da equação ?

Sim. Por padrão, o valor de a é sempre a medida do eixo maior e b do eixo menor. Se o eixo maior for paralelo ao eixo y, então a equação da elipse fica dada por

$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$$

É importante ressaltar que o foco sempre fica no eixo maior. A figura 1.23 ilustra a explicação apresentada.

Exercícios

1) Com o auxílio de uma régua e compasso, faça no plano cartesiano abaixo uma circunferência que tem:

a) Centro $C(0, 0)$ e raio $r = 1$;

b) Centro $C(2, 1)$ e raio $r = 2$;

c) Centro $C(-3, 3)$ e raio $r = 2$.

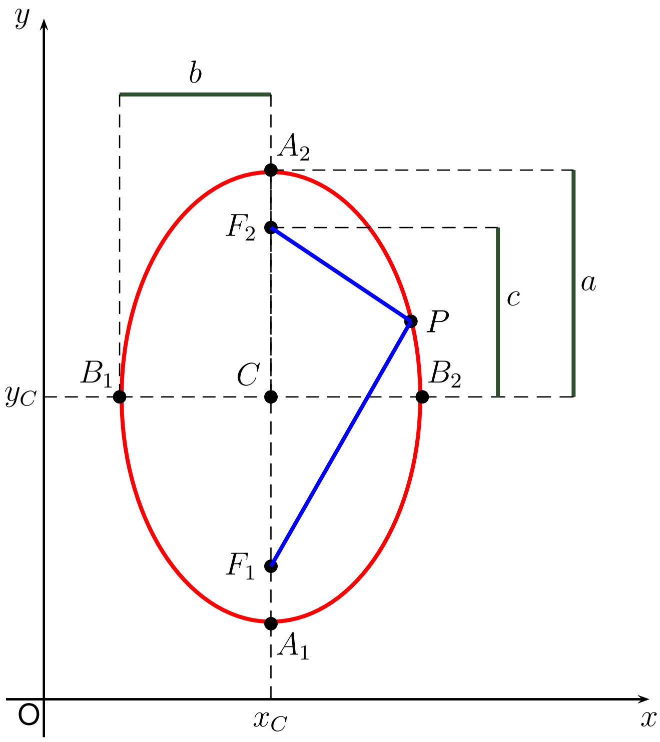


FIGURA 1.23: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo y.

2) O que determina a equação de uma elipse são as coordenadas do centro e os valores de a e b. Assim sendo, obtenha as equações das elipses, bem onde:

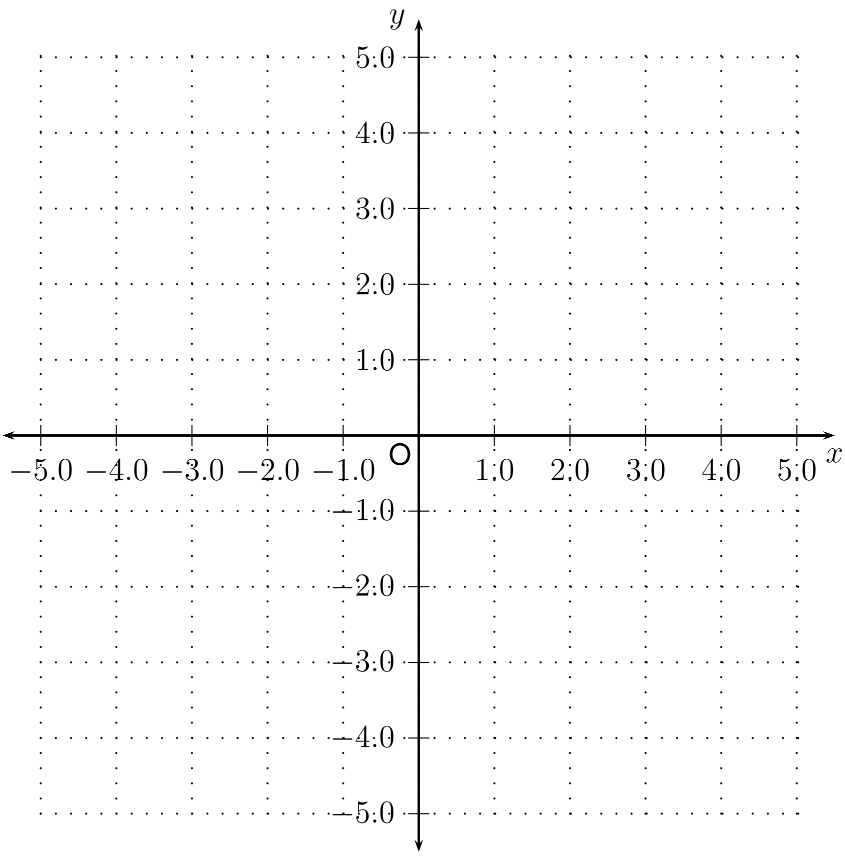
a) $C(0,0)$, $a = 3$ e $b = 1$;

b) $C(3,3)$, $a = 2$ e $b = 1$;

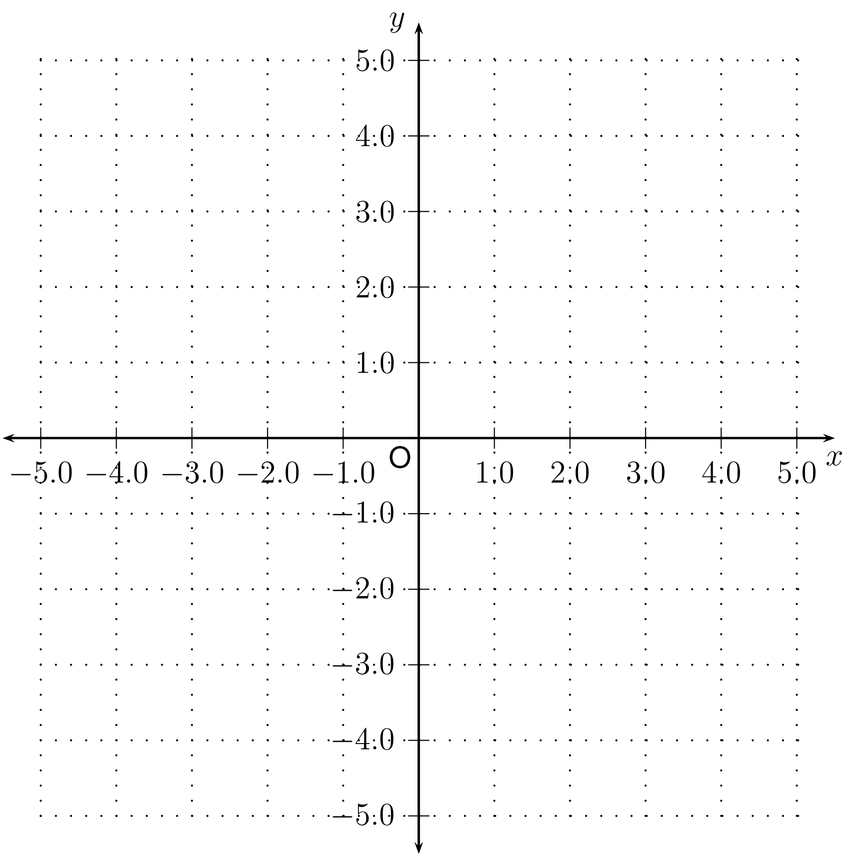
c) $C(-3,2)$, $a = 1$ e $b = 2$;

d) $C(3,-3)$, $a = 1$ e $b = 2$.

3) Determine as coordenadas dos vértices e dos focos de cada uma das elipses do exercício anterior. Depois disso, faça um esboço de cada uma das elipses no plano cartesiano indicado.



Plano cartesiano para o exercício 1.



Plano cartesiano para o exercício 3.

O que é uma parábola ?

Uma PARÁBOLA é o conjunto de pontos que distam igualmente de um ponto fixo, chamado FOCO, e de uma reta d chamada RETA DIRETRIZ. A figura 1.24 ilustra uma parábola e seus elementos.

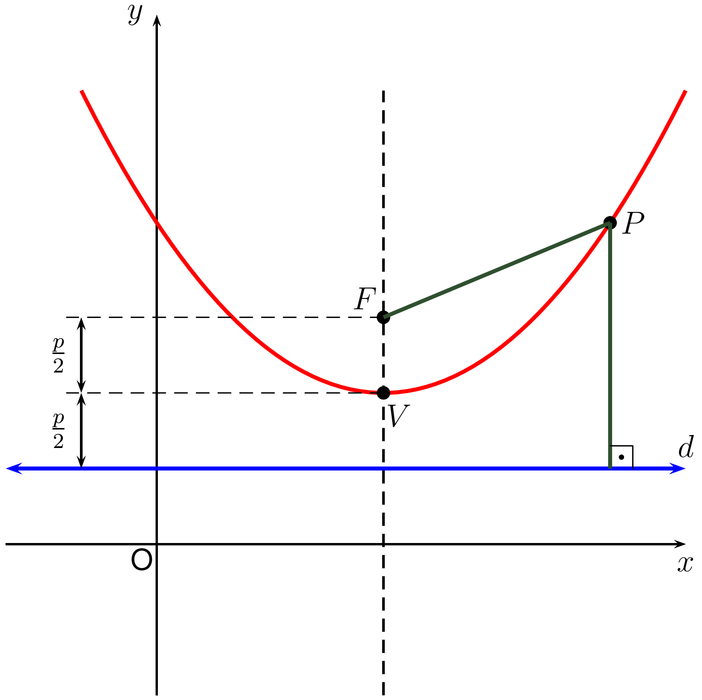


FIGURA 1.24: Parábola.

Quais são os elementos da parábola ?

Observando ainda a figura 1.24, temos:

- V: É o vértice;
- F: É o foco;
- d: É reta diretriz
- p: É distância do foco F até a reta diretriz d. A distância do foco ao vértice e do vértice à reta diretriz é metade desse valor. O seu sinal informa se a parábola tem concavidade voltada para cima ($p > 0$) ou para baixo ($p < 0$).

Qual é a equação que representa matematicamente uma parábola ?

A parábola como a apresentada na figura 1.24 tem a seguinte forma geral

$$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$$

onde $V(x_V, y_V)$ são as coordenadas do vértice, e vale quando a concavidade é voltada para cima ($p > 0$), ou para baixo ($p < 0$).

Se a concavidade for voltada para os lados, a equação da parábola é representada por

$$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V).$$

Nesse caso, se $p > 0$ a concavidade é voltada para a direita, e caso contrário, para a esquerda. A figura 1.25 ilustra o caso quando $p > 0$.

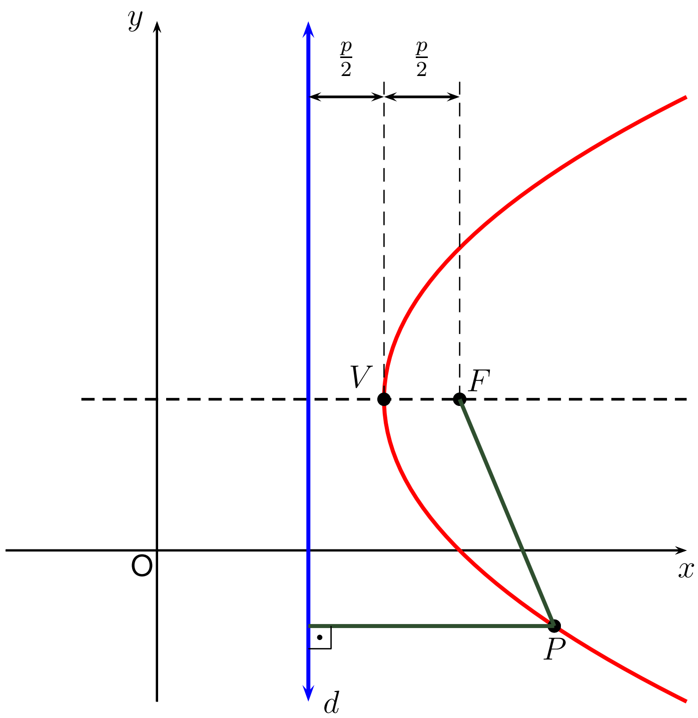


FIGURA 1.25: Parábola.

Exercicios

1) A equação de uma parábola é definida pelo vértice $V(x_V, y_V)$, pelo valor de p e se o eixo da parábola é paralelo ao eixo x ou eixo y. Assim sendo, supondo que o eixo da parábola é paralelo ao eixo y, obtenha as equações das parábolas que têm:

   a) $V(1, 1)$ e $p = 2$;

   b) $V(-1, 2)$ e $p = -2$;

c) $V(-2,-2)$ e $p = 4$;

d) $V(2,-3)$ e $p = 1$.

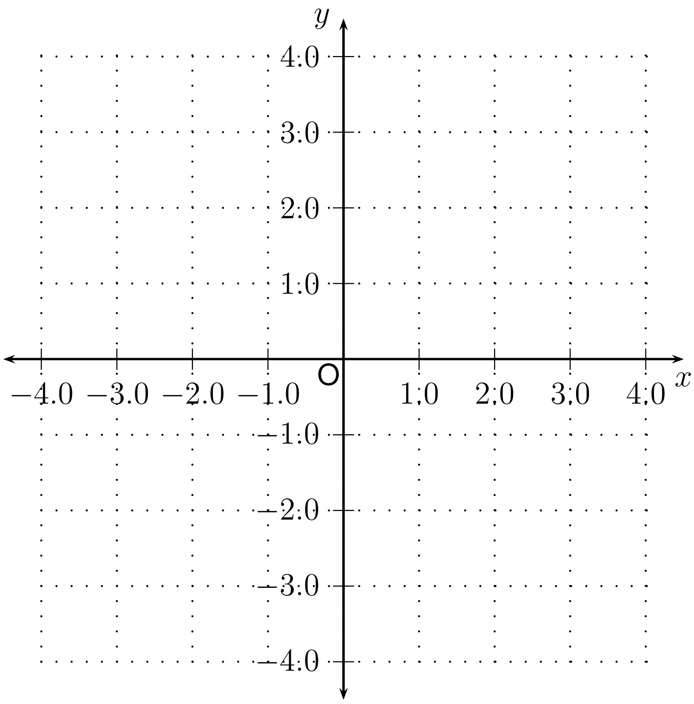
2) Considerando os dados do exercício nº, considere que o eixo da parábola é paralelo ao eixo x e determine as equações das mesmas para cada item.

3) Para cada item dos exercícios nº1 e nº2 determine a equação da reta diretriz e a coordenada do foco.

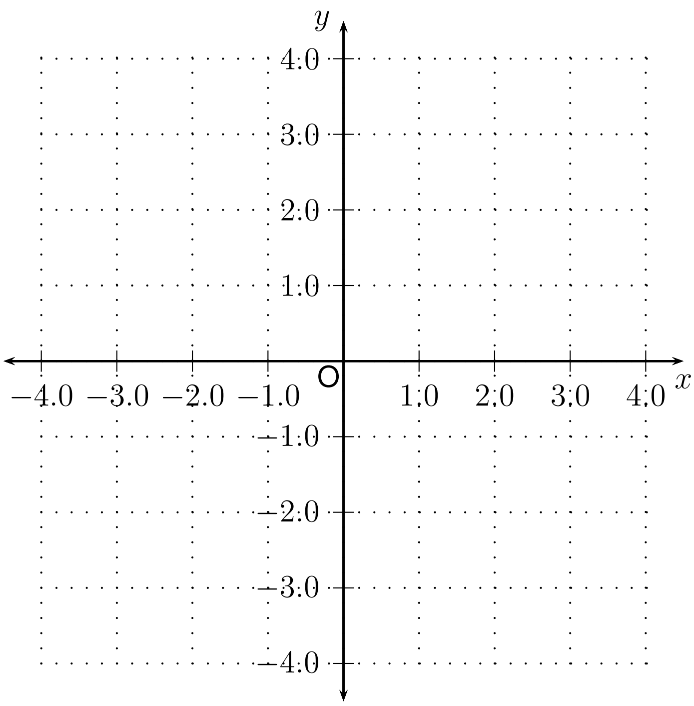
4) Para cada parábola abaixo faça um esboço do gráfico no plano cartesiano indicado.

a) $(x-2)^2 = 4(y-1)$;

b) $(y-1)^2 = -2(x+3)$;



Faça aqui o esboço da parábola do exercicio 4 item a.



Faça aqui o esboço da parábola do exercicio 4 item b.

O que é uma hipérbole ?

Uma hipérbole é um conjunto de pontos $P(x,y)$ no plano cuja diferença da distância a dois pontos fixos distintos, em módulo, é constante.

Quais são os elementos de uma hipérbole ?

Observando a figura 1.26, temos que os elementos são:

- C: É o centro da hipérbole;
- F_1 e F_2: São os focos;
- A_1 e A_2: São os vértices;
- Segmento $\overline{A_1A_2}$: É chamado EIXO REAL e tem comprimento $2a$;
- Segmento $\overline{B_1B_2}$: É chamado EIXO IMAGINÁRIO ou EIXO CONJUGADO e tem comprimento $2b$;
- Distância focal: É o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2}$, o qual tem medida $2c$.

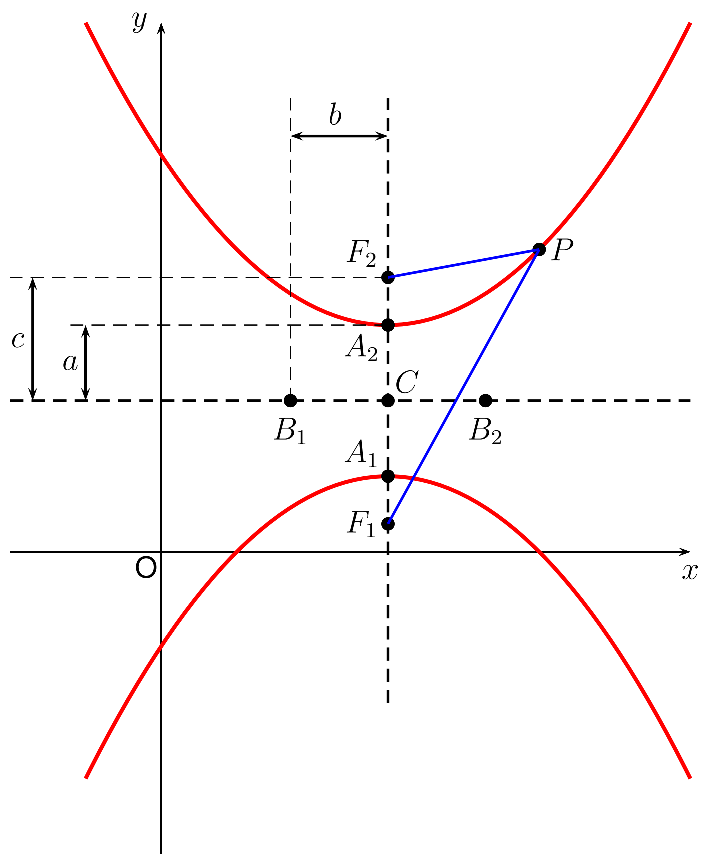


FIGURA 1.26: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo y.

Qual é a equação que representa matematicamente uma hipérbole ?

Isso depende. Se o eixo real for paralelo ao eixo y, como é o caso da figura 1.26, a equação é dada por

$$\frac{(y-y_C)^2}{a^2} - \frac{(x-x_C)^2}{b^2} = 1$$

e se o eixo real for paralelo ao eixo x, como é caso da figura 1.27, a equação é dada por

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2} - \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1.$$

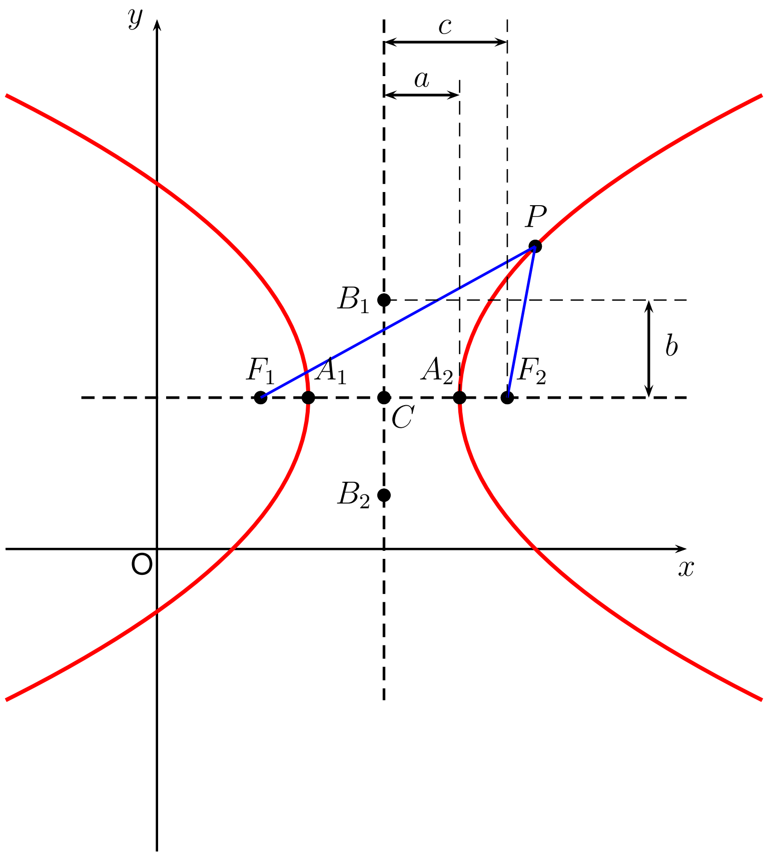


FIGURA 1.27: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x.

Como posso obter c a partir de a e b para determinar a distância focal ?

Observe o triângulo retângulo hachurado na figura 1.28. Nesse triângulo, temos que o segmento $\overline{CB_2}$ tem medida b, o segmento $\overline{A_2C}$ tem medida a e, por último, o segmento $\overline{A_2B_2}$ tem medida c. Dessa forma, para obter o valor de c, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔA_2CB_2, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

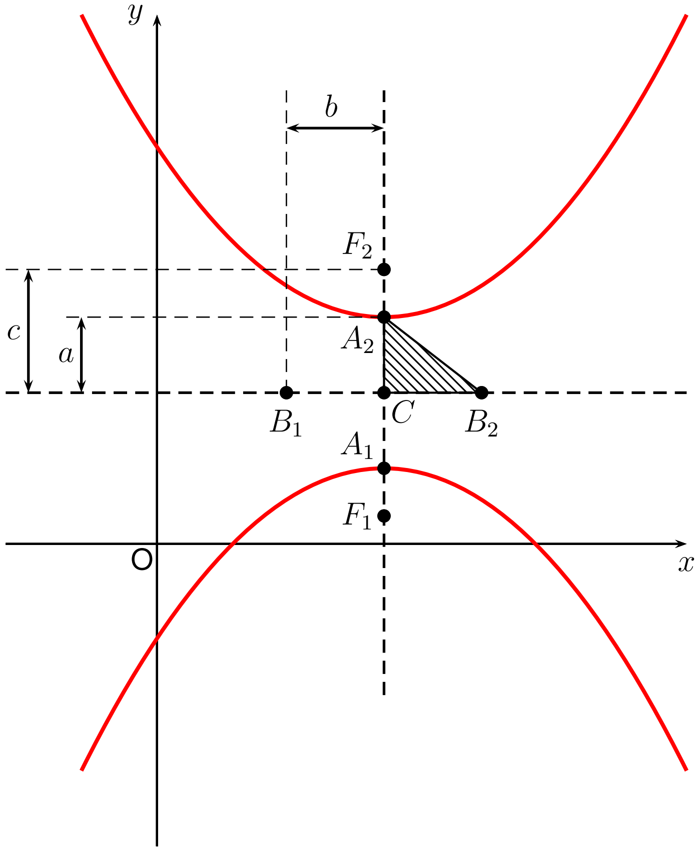


FIGURA 1.28: Cálculo do valor de c na hipérbole.

Exercícios

1) Obtenha as equações das hipérboles, assim como as coordenadas dos vértices e dos focos, que têm:

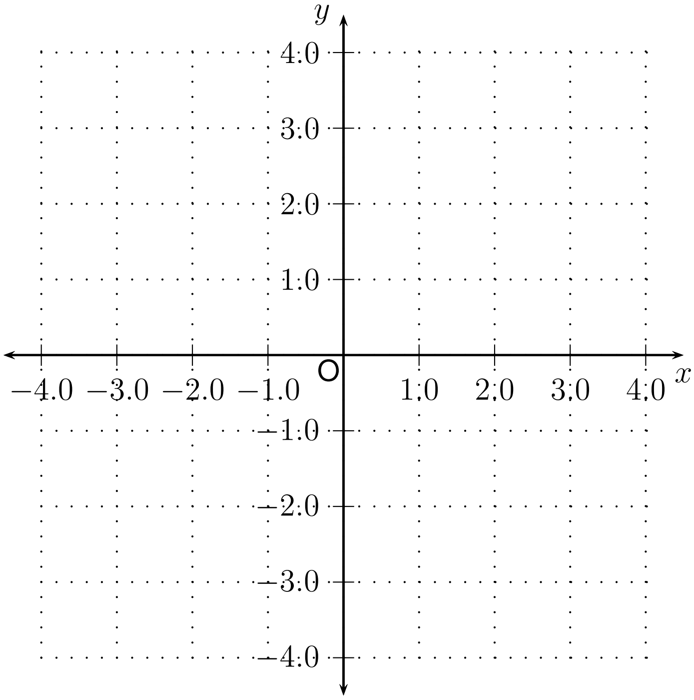
   a) $C(-2,-2)$, $a = 4$ e $b = 2$;

   b) $C(1,-2)$, $a = 2$ e $b = 4$.

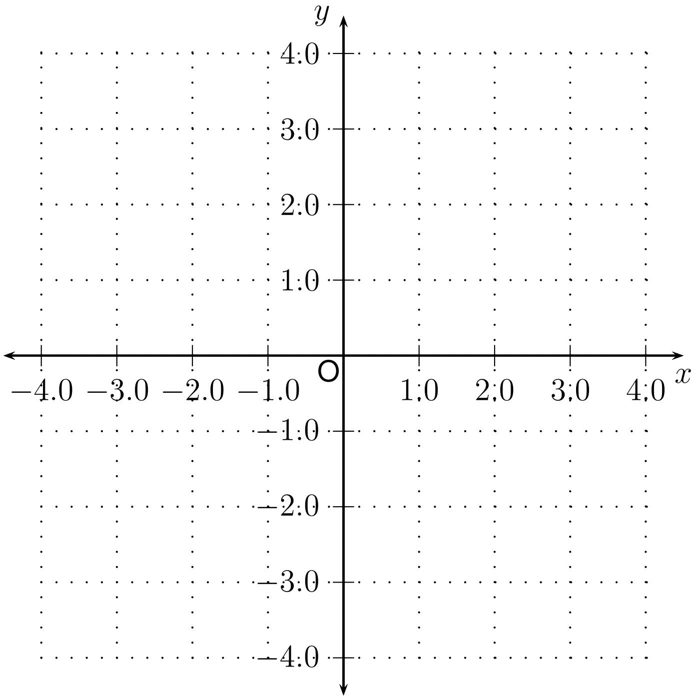
2) Para cada hipérbole abaixo faça um esboço do gráfico no plano cartesiano indicado.

   a) $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$;

   b) $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$.



Faça aqui o esboço da hipérbole do exercicio 4 item a.



Faça aqui o esboço da hipérbole do exercicio 4 item b.

Como posso calcular a distância entre dois pontos no espaço?

Falando de modo conciso, assim como no caso bidimensional, a fórmula que permite obter a distância entre dois pontos no espaço tem por base o Teorema de Pitágoras. Observe a figura 1.29 para acompanhar o desenvolvimento da fórmula.

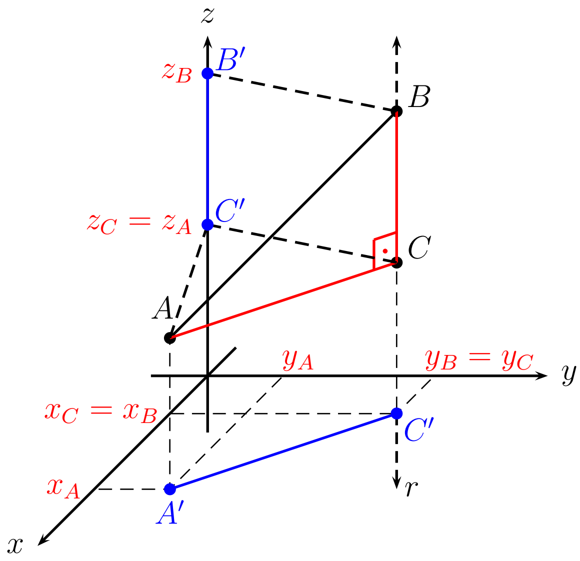


FIGURA 1.29: Distância entre dois pontos no espaço

Seja r uma reta que passa pelo ponto B e é paralela ao eixo z. Seja C um ponto na reta r de tal forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à referida reta. Perceba ainda que o plano que contém o triângulo $\Delta ACC'$ é ortogonal, isto é, perpendicular à reta em qualquer direção. Considere o segmento $\overline{A'C'}$, projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre o plano xy, e o segmento $\overline{B'C'}$, projeção ortogonal do segmento $\overline{BC}$ sobre a reta z. Perceba que o comprimento do segmento $\overline{A'C'}$ pode ser calculado utilizando-se a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos em um plano. Isso pode ser feito pelo simples fato do referido segmento se localizar totalmente contido no plano xy, não tendo nenhuma variação em z. Assim sendo, a distância do ponto A' ao ponto C' é dada por

$$d_{A'C'} = \sqrt{(x_{C'} - x_{A'})^2 + (y_{C'} - y_{A'})^2}$$

Note que o paralelogramo formado pelos vértices $ACC'A'$ é um retângulo. Assim sendo, podemos afirmar que a distância $d_{A'C'} = d_{AC}$, ou seja,

$$d_{A'C'} = \sqrt{(x_{C'} - x_{A'})^2 + (y_{C'} - y_{A'})^2} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = d_{AC} \tag{1.1}$$

Considere os segmentos $\overline{B'C'}$ e $\overline{BC}$. Perceba que ambos têm o mesmo comprimento pelo fato do paralelogramo $BCC'B'$ ser também um retângulo. Nesse caso, a distância do ponto B ao ponto C é simplesmente a diferença entre z_C e z_B, ou seja, $d_{CB} = z_B - z_C$.

Agora, resta apenas determinar a medida do lado AB do triângulo ΔABC, ou seja, calcular d_{AB}, que é a distância entre os pontos A e B no espaço. Note que o referido triângulo é retângulo em C. Podemos então aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo em questão. Continuando, temos então que

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{CB}^2.$$

Substituindo (1.1) e $d_{CB} = z_B - z_C$ nessa última relação,

$$d_{AB}^2 = \left(\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}\right)^2 + (z_B - z_C)^2,$$

$$d_{AB}^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_B - z_C)^2.$$

Olhando na figura 1.29 podemos ver que $x_C = x_B$, $y_C = y_B$ e $z_C = z_A$. Daí, segue que a fórmula para o cálculo da distância no espaço é dada por

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Calcule a distância do ponto de coordenadas $A(1,3,2)$ ao ponto $B(3,1,0)$.

Bom, temos que as coordenadas do ponto $A(1,3,2)$ tem $x_A = 1$, $y_A = 3$ e $z_A = 2$. Do ponto $B(3,1,0)$ temos $x_B = 3$, $y_B = 1$ e $z_A = 0$. Aplicando a fórmula para o cálculo da distância, segue que

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

$$d_{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (0-2)^2},$$

$$d_{AB} = 2\sqrt{3}\ u.c.$$

Exercícios

1) Calcule a distância entre os pontos $A(1,2,3)$ e $B(-1,4,5)$.

2) Calcule a distância do ponto $P(-1,1,4)$ até o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ onde $B(2,-1,0)$ e $C(-4,2,1)$.

Exercícios de Revisão

1) Quais foram os sistemas de coordenadas estudados nesse módulo ?

2) Se $P(x,y)$ é um ponto em coordenadas cartesianas, o que deve ser feito para obter as coordenadas polares desse ponto ?

3) Se $P(r,\theta,z)$ é um ponto em coordenadas cilíndricas, o que devo fazer para obter as coordenadas cartesianas desse ponto ?

4) O que é uma circunferência ?

5) O que é uma parábola e quais são os seus elementos ?

6) O que é uma elipse e quais são os seus elementos ?

7) O que é uma hipérbole e quais são os seus elementos ?

8) Qual é a fórmula utilizada para calcular a distância entre dois pontos no plano e no espaço ?

Nesse módulo foram estudados os fundamentos da geometria analítica no que tange aos sistemas de coordenadas, bem como alguns elementos geométricos importantes como as cônicas (elipse, parábola e hipérbole). No próximo módulo o tema de estudo será a reta no plano e suas propriedades.

Módulo 2
Reta no Plano

O que é uma reta ?

Bom, o caro aluno pode perceber que a união de um conjunto infinito de pontos no plano, sem nenhum espaço entre eles (formando um contínuo), pode formar vários tipos de objetos geométricos. Alguns tipos desses objetos apresentam leis de formação, isto é, LEIS MATEMÁTICAS ESTABELECIDAS POR EQUAÇÕES. Pois bem, UMA RETA É UM TIPO DE OBJETO GEOMÉTRICO FORMADO POR INFINITOS PONTOS COM UMA LEI DE FORMAÇÃO BEM DEFINIDA. Para definir o que é uma reta, vamos abordar inicialmente da forma mais simples. Vamos atacar isso com uma afirmação: *Dados dois pontos distintos em um plano, existe uma única RETA que os contém*. De fato, existe uma única RETA que passa por dois pontos distintos. Entenda, uma reta nada mais é do que uma "linha" contínua infinita sem curvas. A figura 2.1 mostra uma reta em vermelho que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Vamos utilizar de agora em diante letras minúsculas em itálico para nomear as retas. Perceba na referida figura que r é o nome dado para a reta desenhada.

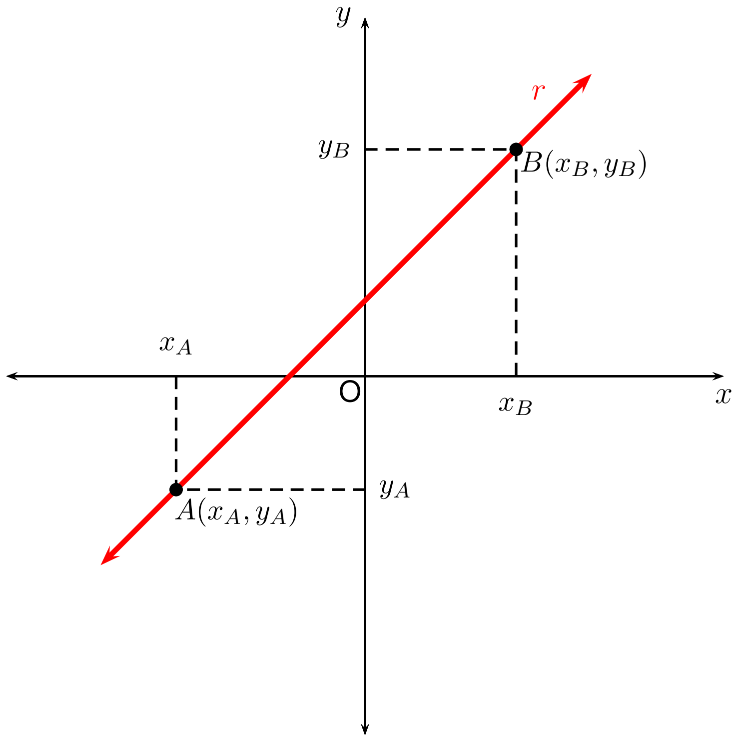


FIGURA 2.1: Exemplo de uma reta.

Existe alguma relação entre as coordenadas x e y de pontos que pertencem a uma reta ?

Sim. Vamos considerar aqui uma das formas mais simples para explicar isso. Se $P(x, y)$ é um ponto que pertence a uma reta, então as coordenadas x e y satisfazem uma equação da forma $y = ax + b$, para algum a e b pertencentes aos reais. a figura 2.2 apresenta duas retas com suas respectivas equações.

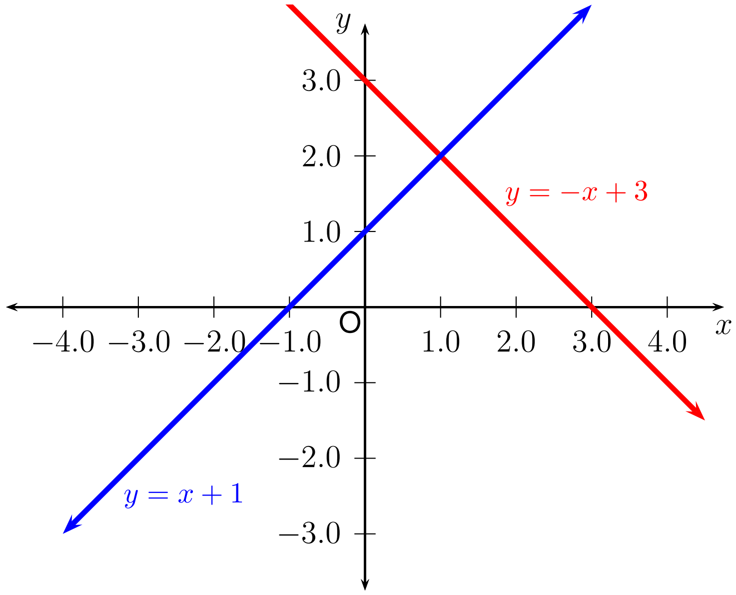


FIGURA 2.2: Exemplos de retas com suas respectivas equações.

Na relação $y = ax + b$, as constantes a e b recebem nomes específicos ? Essa equação tem algum nome específico ?

Sim. A constante a é chamada COEFICIENTE ANGULAR e b é chamada TERMO INDEPENDENTE. Essa equação é chamada EQUAÇÃO REDUZIDA RETA.

É possível determinar a e b a partir das coordenadas de dois pontos distintos ?

Sim. É bem simples. Vamos a um exemplo. Sabendo que $A(3, 0)$ e $B(0, 6)$ pretencem à mesma reta, determine a equação que define a reta. Bom, se os referidos pontos pertencem a uma mesma reta, então essa reta tem uma equação da forma $y = ax + b$. Assim sendo, temos que

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a \times 3 + b \\ 6 = a \times 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases}$$

Portanto, a equação que define a reta é dada por $y = -2x + 6$. Note que tudo o que é preciso para obter a e b é um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Bom, o sistema linear desse último exemplo foi bem fácil de resolver, uma vez que o valor de b já foi encontrado de modo direto. Vamos então a um outro exemplo onde isso não ocorre. Se $A(-1,5)$ e $B(1,-1)$ são pontos de uma reta, qual é a equação reduzida que a define ?

Note que dos pontos dados temos que $x_A = -1$, $y_A = 5$, $x_B = 1$ e $y_B = -1$. Montando o sistema linear, segue-se que

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a \times (-1) + b \\ -1 = a \times 1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 5 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

Isolando b na segunda equação vem que $b = -a-1$. Substituindo $b = -a-1$ na primeira equação,

$$-a + (-a - 1) = 5 \Rightarrow -2a - 1 = 5 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow a = -3.$$

Se $a = -3$, então $b = -(-3) - 1$, ou seja, $b = 2$. Logo, a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(-1,5)$ e $B(1,-1)$ é dada por $y = -3x + 2$.

Como posso fazer o gráfico de uma reta tendo conhecimento apenas de sua equação reduzida ?

Isso é bem simples. Para obter dois pontos distintos utilizando a equação da reta, vamos fazer o gráfico da reta definida pela equação $y = x - 1$. Atribuindo $x = -2$ nessa equação, temos que $y = -3$, e daí já temos um ponto A, o qual tem coordenadas $A(-2,-3)$. Atribuindo agora $x = 2$ na referida equação, iremos obter $y = 1$, e com isso o segundo ponto B de coordenadas $B(2,1)$. Agora é só posicionar esses dois pontos no plano cartesiano e com régua passar um traço passando sobre os pontos para obter o gráfico da reta (em vermelho), conforme a figura 2.3.

Se na equação reduzida $y = ax + b$ de uma reta o valor de b for igual a zero ($b = 0$), o gráfico dessa reta tem algum comportamento especial ?

Sim. Quando $b = 0$, a equação da reta fica dada por $y = ax$, e a reta passa pela origem dos eixos coordenados. A figura 2.4 ilustra essa situação.

A equação reduzida da reta $y = ax + b$ é uma função ?

Sim. Perceba que o valor de y na equação $y = ax+b$ é FUNÇÂO do valor de x, ou seja, $y = f(x)$. Esse tipo de função é chamada função linear, e seu gráfico é uma reta. No caso em que $a = 0$, a função fica $y = b$ e é uma reta paralela ao eixo x. Se $b = 0$, a função fica $y = ax$, e é uma reta que passa pela origem (veja figura 2.4), e nesse caso é chamada FUNÇÃO AFIM.

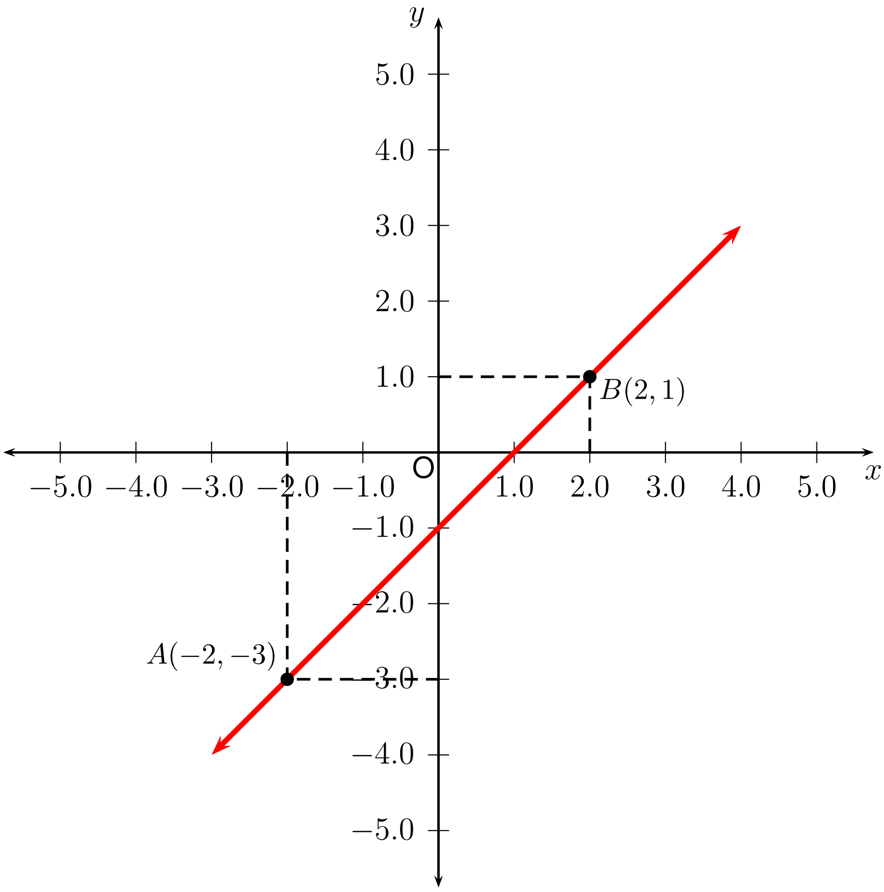


FIGURA 2.3: Gráfico da reta $y = x - 1$.

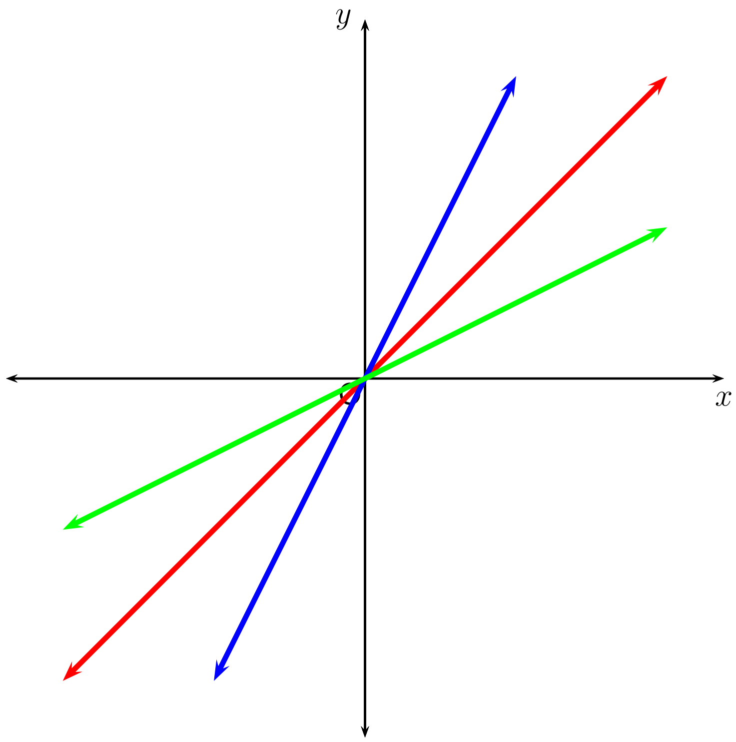


FIGURA 2.4: Funções Afim.

É possível determinar a equação reduzida de uma reta tendo conhecimento das coordenadas de dois pontos distintos contidos nela ?

Sim. Na equação reduzida da reta $y = ax + b$, o coeficiente angular a nada mais é do que a inclinação da reta em relação ao eixo x no sentido anti-horário (veja figura 2.5). Dessa forma, o valor de a é a tangente do referido ângulo θ, e pode ser calculado pela fórmula

$$a = tg(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

onde $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são as coordenadas dos pontos por onde a reta passa. Depois de calculado a, para obter b basta utilizar a fórmula $b = y_A - ax_A$ ou $b = y_B - ax_B$. Para exemplificar, se $A(1, 3)$ e $B(6, 6)$, temos que

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-3}{6-1} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Para b, segue que $b = y_A - ax_A = 3 - 0.6 \times 1 = 2.4$. Logo, a equação reduzida da reta é dada por $y = 0.6x + 2.4$.

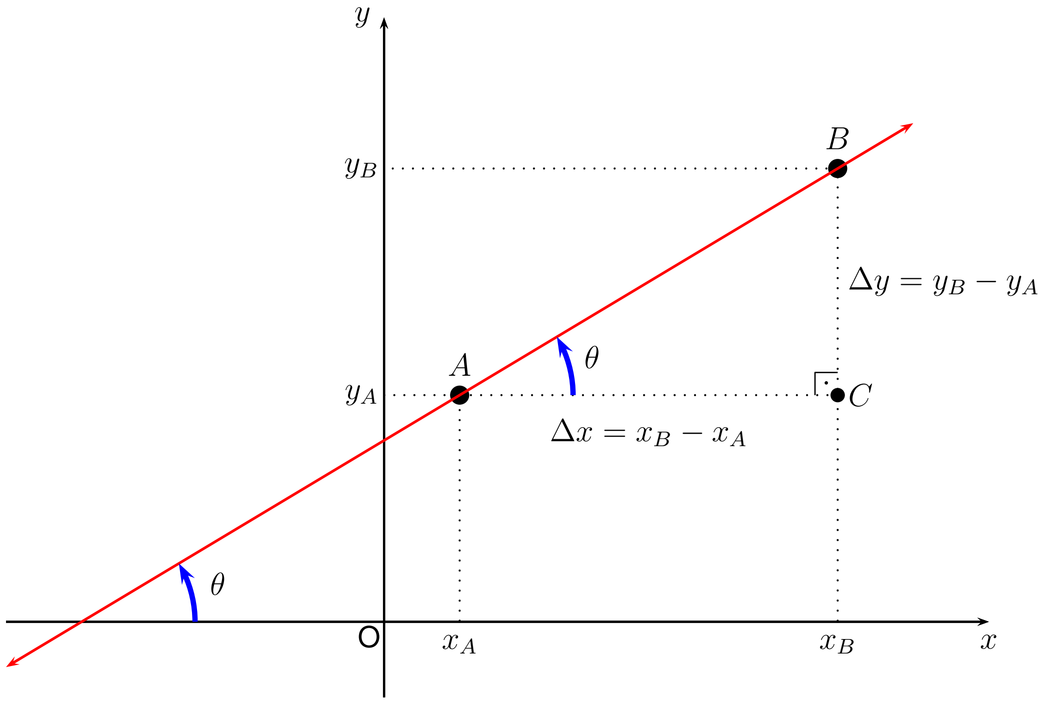


FIGURA 2.5: Cálculo do coeficiente angular da reta.

Se eu tiver conhecimento da equação reduzida de uma reta, é possível saber se um ponto $P(x_P, y_P)$ pertence a essa reta ?

Sim. Para que um ponto pertença a uma reta de equação conhecida, ao substituir as coordenadas do ponto na equação, a relação de igualdade terá que ser satisfeita. Caso contrário, o ponto não pertence à reta. Por exemplo, considere a reta $y = 2x + 1$. Perceba que o ponto de coordenadas $A(1, 3)$ pertence a essa reta, pois

$$y_A = 2x_A + 1 \Rightarrow 3 = 2 \times 1 + 1 \Rightarrow 3 = 3.$$

Veja, ao substituir as coordenadas do ponto A na equação, que a mesma foi satisfeita. Se substituirmos as coordenadas do ponto $B(0, 3)$ na equação da referida reta, veremos que a equação não é satisfeita. Verifique por você mesmo isso.

Exercicios

1) Determine a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $A(-2, 3)$ e $B(4, 1)$.

2) Verifique se os pontos $A(1, 5)$ e $B(1, 1)$ pertecem à reta r de equação geral $y = 2x - 5$. Justifique sua resposta.

3) Determine o coeficiente angular a da reta r de equação reduzida $y = ax - 1$ sabendo que o ponto $P(4, 2)$ pertence a essa reta.

Existem outras formas de equações para representar uma reta ?

Sim. Considere as explanações a seguir:

- EQUAÇÃO GERAL DA RETA: A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0.$$

- EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA: Nessa forma, a reta é representada pela equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

- EQUAÇÃO PARAMÉTRICA: Nessa forma, as coordenadas x e y de pontos que estão contidos em uma reta ficam em função de um mesmo parâmetro t, ou seja, ficam representadas por um par de funções da forma

$$\begin{cases} x(t) = a + bt \\ y(t) = c + dt \end{cases}$$

onde t é um número real qualquer.

Como posso obter a equação geral de uma reta a partir de sua equação reduzida ?

É simples. Se $y = ax + b$ for a equação reduzida, para obter a equação geral, basta passar o que está no segundo membro da equação reduzida para o primeiro membro. Veja abaixo:

$$y = ax + b \Rightarrow -ax + y - b = 0$$

Por exemplo, se $y = 2x - 1$ é a equação reduzida de uma reta, a sua equação geral é dada por $-2x + y + 1 = 0$.

Como posso obter a equação reduzida de uma reta a partir de sua equação geral ?

É simples. Basta isolar y. Veja abaixo:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Por exemplo, se $8x - 2y + 16 = 0$ é a equação geral de uma reta, a sua equação reduzida é dada por

$$8x - 2y + 16 = 0 \Rightarrow -2y = -8x - 16 \Rightarrow 2y = 8x + 16 \Rightarrow y = 4x + 8.$$

Como posso obter a equação segmentária de uma reta a partir de sua equação geral ?

Também é bem simples. Veja abaixo o processo.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow \frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1.$$

Por exemplo, vamos obter a equação segmentária da reta de equação geral dada por $2x-3y+4=0$.

$$2x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -4 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{3y}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1.$$

A equação segmentária da reta tem alguma vantagem em relação às outras ?

Tem sim. Como já vimos, a equação segmentária de uma reta é dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Os denominadores das frações que estão no primeiro membro fornecem os pontos em que a reta intercepta o eixo x e o eixo y. No caso, o ponto que a reta intercepta o eixo x tem coordenada $A(a, 0)$. O ponto que a reta intercepta o eixo y tem coordenadas $B(0, b)$. Essas informações facilitam a construção do gráfico da reta. Veja a ilustração na figura 2.6.

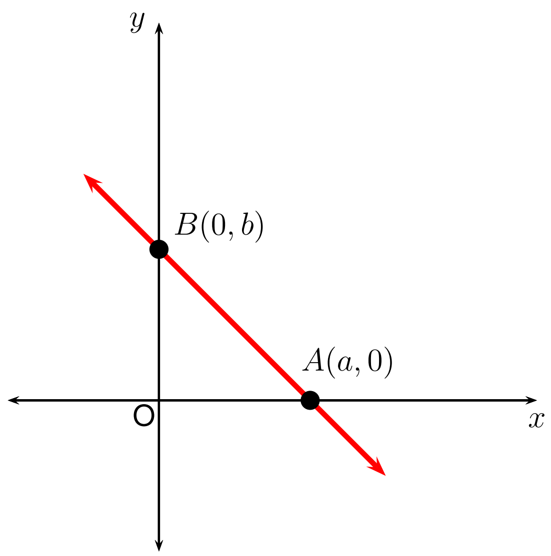


FIGURA 2.6: Reta definida por uma equação segmentária.

Como posso obter as equações paramétricas de uma reta a partir das coordenadas de dois pontos por onde ela passa ?

Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ forem dois pontos que definem uma reta, então para se obter as equações paramétricas, basta fazer

$$\begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = x_B + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_B + (y_B - y_A)t \end{cases}$$

Bom, vamos a um exemplo. Se $A(1,3)$ e $B(3,-1)$ forem dois pontos contidos numa mesma reta, obtenha suas equações paramétricas.

Usando o que foi explicado anteriormente, temos que

$$\begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 1 + (3-1)t \\ y(t) = 3 + (-1+3)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 3 + 2t \end{cases}$$

Existem apenas as formas anteriormente apresentadas para se obter as equações paramétricas de uma reta ?

Não. Existem várias formas. Aqui estamos apresentando apenas algumas. Entenda, o processo de obtenção de tais equações, bem como a conversão entre elas, consiste em essência em manipulações algébricas. Você pode converter de um formato para qualquer outro fazendo as manipulações adequadas.

Como posso obter as equações paramétricas de uma reta a partir de sua equação geral ?

Existem várias formas. Uma das formas consiste em fazer $x = t$ e depois disso escrever y em função de t. Por exemplo, se $ax + by + c = 0$ é a equação geral de uma reta, façamos $x = t$. Daí segue que $at + by + c = 0$. Isolando y iremos obter $y = -\frac{at}{b} - \frac{c}{b}$. Pronto, e daí segue que as equações paramétricas são dadas por

$$\begin{cases} x(t) & = & t \\ y(t) & = & -\dfrac{at}{b} - \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

Exercício

1) Considere a reta r que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(-3,3)$. Determine as seguintes formas de representação dessa reta:

   a) Equação reduzida

   b) Equação geral

   c) Equação segmentária

   d) Equações paramétricas

Como posso saber se duas retas são perpendiculares entre si a partir das informações dadas por suas equações ?

Bom, vamos utilizar a equação reduzida da reta nesse processo, e representar tal equação por $y = mx + q$, onde m é seu coeficiente angular. Continuando, seja r uma reta de equação reduzida dada por $y = m_r x + q_r$ e s uma outra reta de equação reduzida dada por $y = m_s x + q_s$. A reta r será perpendicular à reta s se, e somente se, $m_r \times m_s = -1$.

Pode me mostrar um exemplo de duas retas perpendiculares ?

Sim. Considere as retas r e s de equações reduzidas, respectivamente, $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{x}{2} - 1$. Da reta r temos que o coeficiente angular é dado por $m_r = 2$, e o da reta s por $m_s = -\frac{1}{2}$. Note que $m_r \times m_s = -1$. Logo, segue que a reta r é perpendicular à reta s. Veja a figura 2.7.

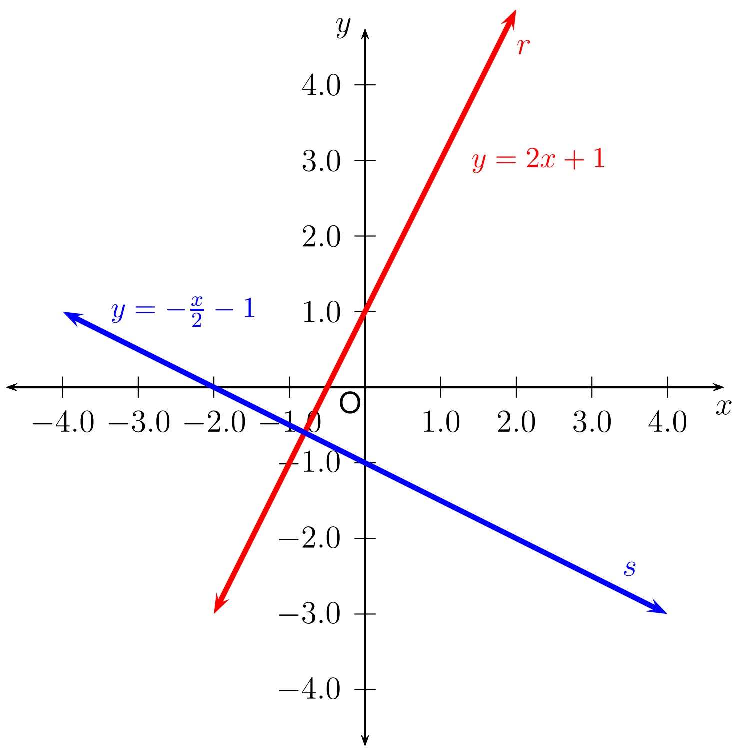


FIGURA 2.7: Exemplos de retas perpendiculares.

Dado um ponto $P(x_P, y_P)$, como posso determinar uma reta r que passe por esse ponto e seja perpendicular a uma reta s ?

Vamos lá. Seja $P(x_P, y_P)$ o ponto dado e seja s uma reta qualquer do plano dada pela equação geral

$$ax + by + c = 0.$$

Perceba que o coeficiente angular dessa reta é dado por $m_s = -\frac{a}{b}$. Bom, note que para que uma reta r seja perpendicular à reta s o produto de seu coeficiente angular m_r com o coeficiente angular da reta s dado por m_s tem que ser igual a -1. Assim sendo, o coeficiente angular da reta r tem que ser igual a

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r = \frac{1}{-\frac{a}{b}} \Rightarrow m_r = \frac{b}{a}.$$

Dessa forma, a equação reduzida da reta r é dada por

$$y = m_r x + q_r \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + q_r.$$

Falta determinar q_r. Lembre que essa reta deve passar pelo ponto $P(x_P, y_P)$. Isso significa que q_r tem que ser tal que a equação da reta r seja satisfeita ao substituir as coordenadas do ponto $P(x_P, y_P)$ em sua expressão. Logo, basta substituir x_P e y_P e isolar q_r para obter a equação reduzida da reta r. Continuando,

$$y_P = m_r x_p + q_r \Rightarrow q_r = y_P - m_r x_P.$$

Para exemplificar, vamos determinar a equação da reta r que passa pelo ponto $P(1, 2)$ e é perpendicular à reta s de equação $y = 2x + 1$. Bom, o coeficiente angular da reta s é dado por $m_s = 2$. Assim sendo, qualquer reta r perpendicular a reta s terá que ter coeficiente $m_r = -\frac{1}{2}$, pois dessa forma teremos $m_r \times m_s = -1$. Com isso, até agora temos que a reta r perpendicular a s tem a forma $y = -\frac{1}{2}x + q_r$. Falta determinar q_r. Para isso, basta substituir as coordenadas do ponto $P(1, 2)$ na mesma. Continuando, segue que $2 = -\frac{1}{2} \times 1 + q_r$. Isolando q_r e calculando, temos que $q_r = \frac{5}{2}$. Logo, a equação reduzida da reta é r é dada por $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.

Exercícios

1) Verfique se as retas r e s dadas, respectivamente, pelas equações $x - 2y + 5 = 0$ e $2x + y - 8 = 0$ são perpendiculares.

2) Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(-2,1)$ e é perpendicular à reta $-x+y = 0$.

É possível calcular a distância de um ponto a uma reta ?

Sim. Há mais de uma forma de fazer isso. Vou explicar uma delas. Vamos lá. Antes de mais nada é importante ressaltar que essa distância é o comprimento do segmento perpendicular que liga o ponto à reta, conforme figura 2.8. Veja que na figura, o segmento de menor comprimento é aquele que é perpendicular à reta e, por definição, a distância é o comprimento desse segmento. Bom, seja $P(x_0, y_0)$ um ponto qualquer do plano cartesiano, e r uma reta qualquer dada pela equação geral $ax + by + c = 0$. Vamos obter a distância do ponto P até a reta r por três etapas, com uma observação. Para evitar uma apresentação demasiada de contas, será exposto apenas o resultado principal de cada etapa:

1ªEtapa: Vamos obter a equação da reta s que passa por $P(x_0, y_0)$ e é perpendicular a reta r. Bom, fazendo os cálculos iremos verificar que a equação geral da reta s é dada por

$$-bx + ay - ay_0 + bx_0 = 0.$$

2ªEtapa: Vamos agora calcular as coordenadas do ponto $P(x, y)$ de intersecção da reta r com a reta s. Para isso precisamos resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay - ay_0 + bx_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} \\ \\ y = \dfrac{-abx_0 + a^2y_0 - cb}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Note que a solução do sistema linear fornece as coordenadas do ponto $P(x, y)$ de intersecção.

3ªEtapa: Por último, vamos calcular a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ ao ponto de intersecção $P(x, y)$. Fazendo isso, iremos obter a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ a reta r.

$$d_{P_0r} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$d_{P_0r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

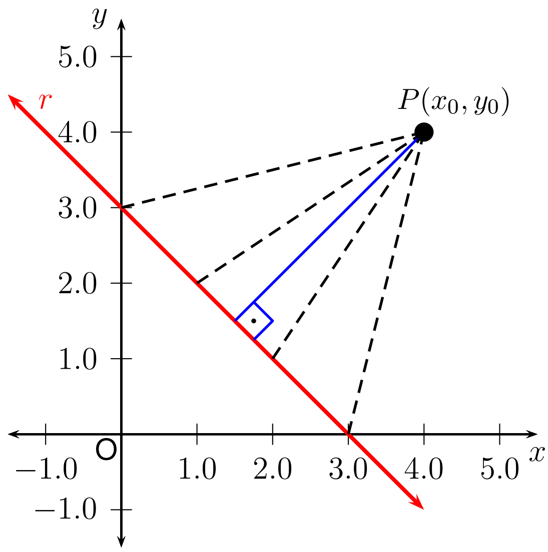


FIGURA 2.8: Distância de ponto a reta.

Calcule então a distância do ponto $P(1,2)$ até a reta r dada por $2x+3y+4=0$.

Das coordenadas do ponto $P(1,2)$ temos que $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$. Da equação geral da reta r temos que $a = 2$ e $b = 3$. Jogando esses valores na fórmula para o cálculo da distância de ponto a reta, segue-se que

$$d_{P_0 r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2\times 1 + 3\times 2 + 4|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}.$$

Como posso saber se duas retas são paralelas ?

Antes de mais nada, é importante saber quando duas retas são paralelas. Duas retas são paralelas quando não se interceptam, e se interceptam são idênticas. Saber se uma reta r é paralela a uma reta s olhando apenas paras a equações que as definem é muito simples. Basta ver se seus coeficientes angulares são iguais, isto é, se $m_r = m_s$. Por exemplo, a reta r de equação $y = 2x - 1$ é paralela a reta s de equação $y = 2x + 1$. De fato, veja que $m_r = 2$ e $m_s = 2$, ou seja, $m_r = m_s$. Veja na figura 2.9.

Dada uma reta e um ponto que não a contém, como posso obter a equação da reta que passa por esse ponto e é paralela a reta dada ?

A essência desse processo está no coeficiente angular. Lembre que quando duas retas são paralelas, seus coeficientes angulares são iguais, diferindo apenas no termo independente. Por

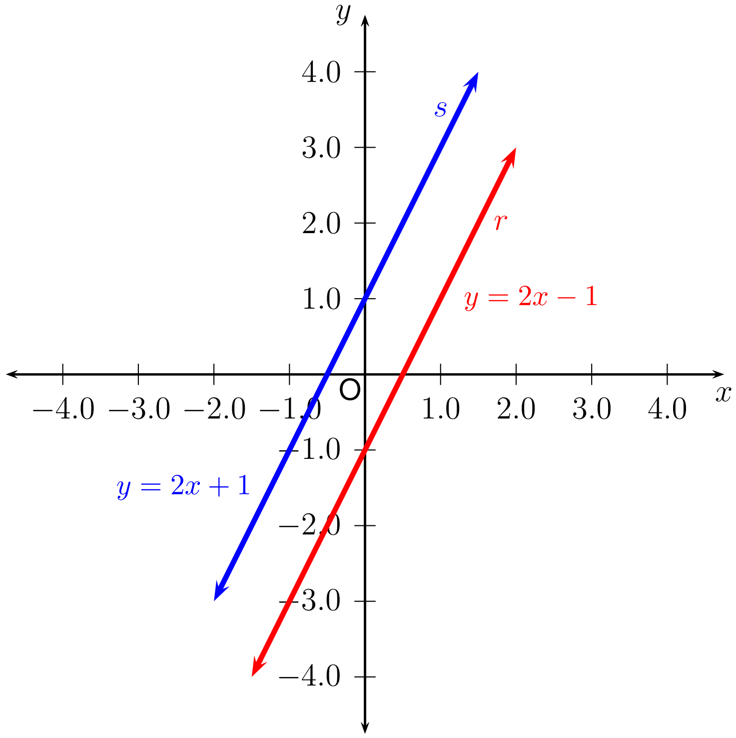


FIGURA 2.9: Exemplos de retas paralelas.

exemplo, a reta r de equação $x + y + 1 = 0$ e a reta s de equação $x + y + 2 = 0$ são paralelas e distintas. Vamos a um outro exemplo. Para determinar a reta que passa pelo ponto $P(1, 2)$ e é paralela a reta $x+2y+4 = 0$, basta considerar que essa reta é da forma $x+2y+c = 0$. Resta agora determinar o valor de c. Se $P(1, 2)$ pertence a reta, então as coordenadas desse ponto deverão satisfazer a equação que define a reta. Assim sendo, vamos substituir essas coordenadas e isolar c. Continuando, vem que $1 + 2 \times 2 + c = 0$, ou seja, $c = -5$. Portanto, a reta desejada tem equação geral dada por $x + 2y - 5 = 0$.

Exercícios

1) Determine a distância do ponto $P(1, -4)$ a reta r de equação $x + 2y - 4 = 0$.

2) Determine a distância do ponto $P(-4, 2)$ a reta r de equações paramétricas dadas por $x = 1+t$ e $y = -2 - 4t$.

3) Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $P(-2, 1)$ e é paralela à reta r de equação reduzida $y = 4x - 5$.

4) Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $P(1, 2)$ e é paralela à reta r que passa

pelos pontos $A(-2,0)$ e $B(0,-3)$.

Se uma reta divide o plano cartesiano em dois semi-planos (ou regiões), como posso saber em que lado do semi-plano está um dado ponto ?

Há várias maneiras de fazer isso. Vamos abordar um jeito de fazer essa análise. Uma reta de equação geral $ax + by + c = 0$ divide o plano em duas regiões. Em uma região teremos $ax + by + c > 0$ e na outra $ax + by + c < 0$. A primeira coisa a ser feita é delimitar essas regiões. Por exemplo, vamos fazer isso considerando a reta $x + y = 0$, conforme figura 2.10. Se pegarmos o ponto $P(1,1)$, que está acima da reta na região em azul, teremos $x + y = 1 + 1 = 2 > 0$, então todo ponto para o qual $x + y > 0$ estará na referida região. Caso contrário, estará na região vermelha onde $x + y < 0$. Se $x + y = 0$, então o ponto está sobre a reta.

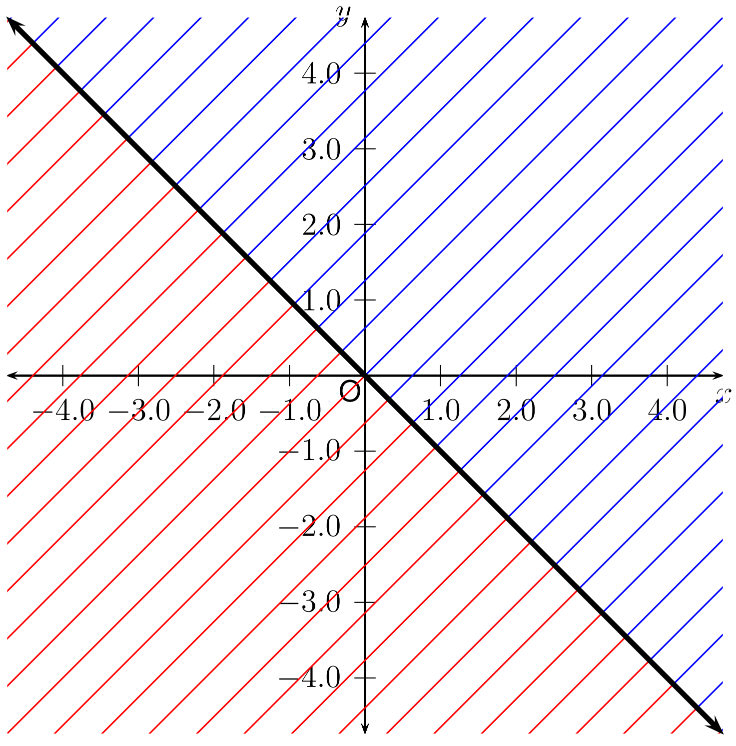


FIGURA 2.10: Regiões definidas por uma reta.

Vamos a mais um exemplo.

Determine a região do plano onde $-x-y-1>0$. Bom, a primeira coisa a fazer é fazer o gráfico da reta. Depois disso, basta pegar um ponto de um lado da reta e substituir na inequação, por exemplo, o ponto $P(1,1)$, que está acima da reta. Note que nesse caso temos $-x-y-1=-3<0$. Assim sendo, a região procurada fica do outro lado da reta, que é a região marcada em vermelho na figura 2.11.

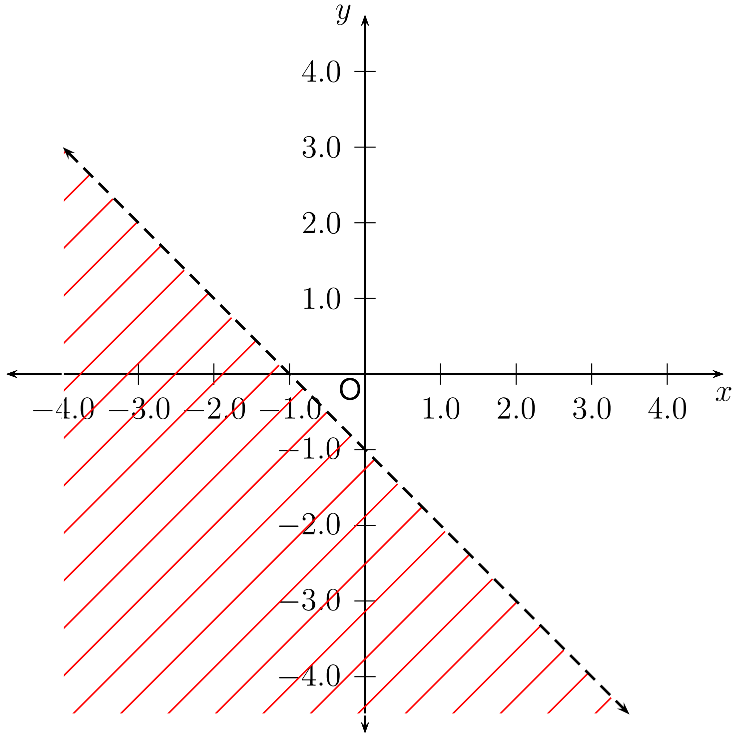


FIGURA 2.11: Região onde $-x-y-1>0$.

Como posso fazer para obter a região que é a solução de um sistema de inequações ?

Considere o seguinte sistema linear de inequações:

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y<0 \end{cases}$$

Basta agora determinar a região solução (vide figura 2.12) da primeira inequação e depois o da segunda (vide figura 2.13). Em seguida, resta ver a região que eles tem em comum, a qual é a solução, conforme figura 2.14.

Exercícios

1) Faça um esboço no plano cartesiano das soluções dos seguintes sistemas de inequações:

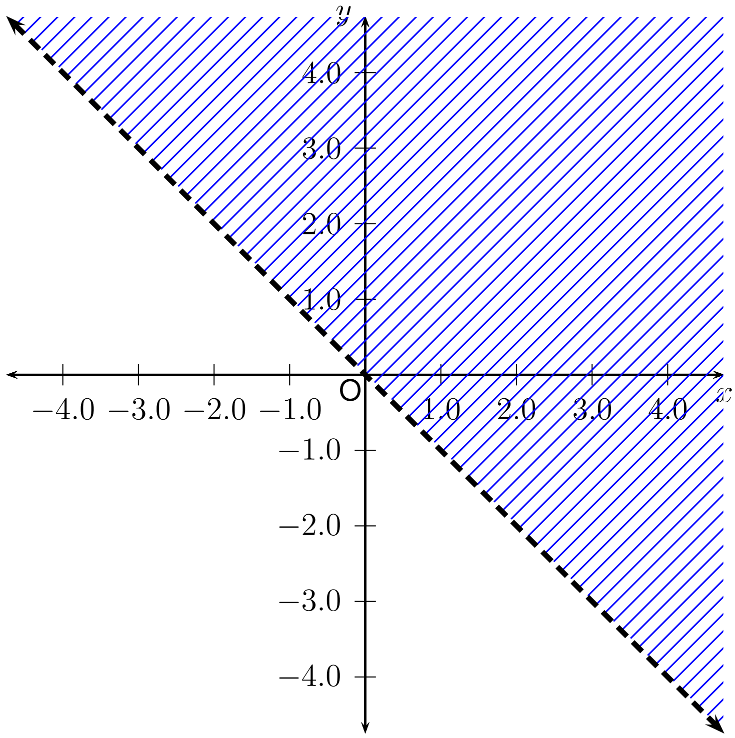


FIGURA 2.12: Região que satisfaz a inequação $x + y > 0$.

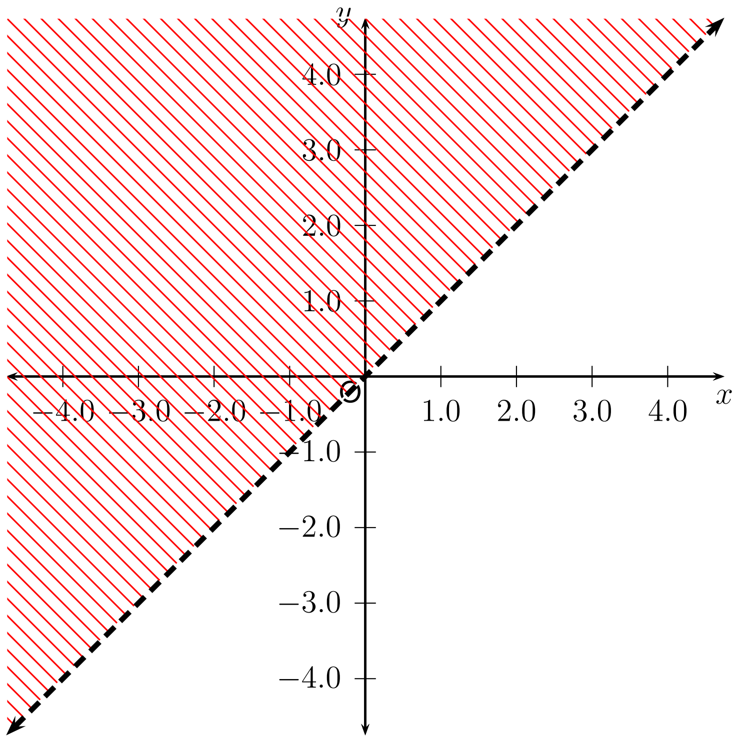


FIGURA 2.13: Região que satisfaz a inequação $x - y < 0$.

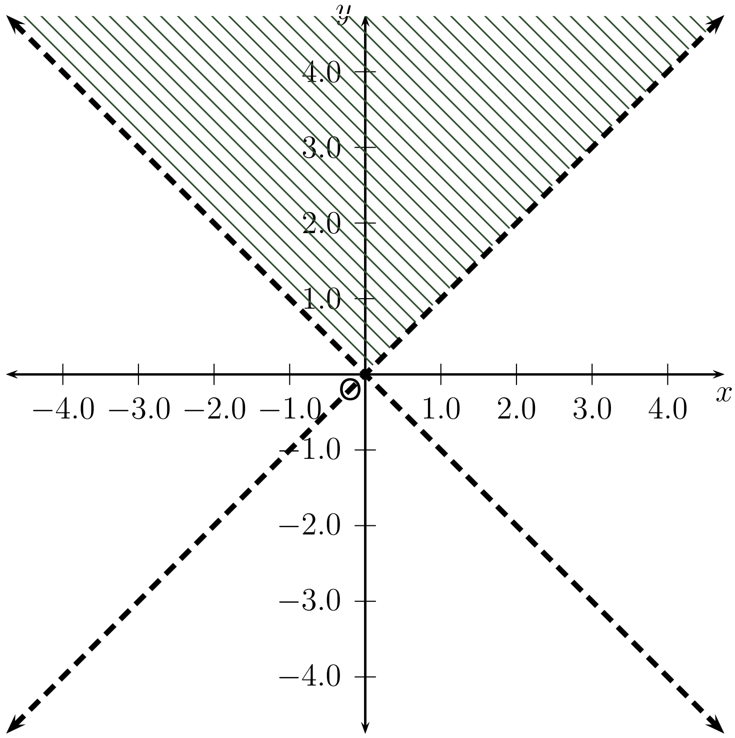


FIGURA 2.14: Solução do sistema de inequações.

(a) $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - y + 3 > 0 \\ x + 2y - 4 < 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x - y - 2 > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$

Exercícios de Revisão

1) Quais os tipos de equações através do qual podemos representar uma reta ?

2) A partir das equações de duas retas distintas r e s é possível saber se elas são perpendiculares ? Em caso positivo, explique como isso pode ser feito ?

3) A partir das equações de duas retas distintas r e s é possível saber se elas são paralelas ? Em caso positivo, explique como isso pode ser feito ?

Módulo 3
Vetores no Plano

O que é um vetor ?

Um VETOR é um segmento orientado, designado por $\overrightarrow{AB}$ ou simplesmente $\overrightarrow{v}$, que possui uma direção, sentido e módulo (comprimento). Exemplos são apresentados na figura 3.1. Quando se fala em um vetor $\overrightarrow{v}$ não se está falando apenas de um único vetor, mas sim de todos os vetores EQUIPOLENTES (vetores que possuem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo) ao vetor v. Por exemplo, na figura 3.2 os vetores vermelhos são todos equipolentes entre si. O mesmo ocorre com os vetores azuis. Assim sendo, quando se fala de um vetor $\overrightarrow{v}$, estamos falando implicitamente de um conjunto infinito de vetores equipolentes entre si.

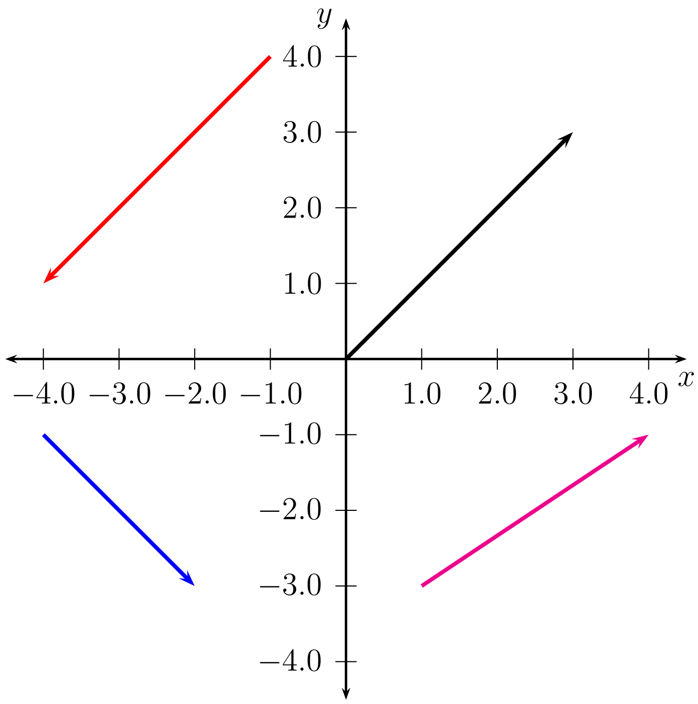


FIGURA 3.1: Exemplos de vetores.

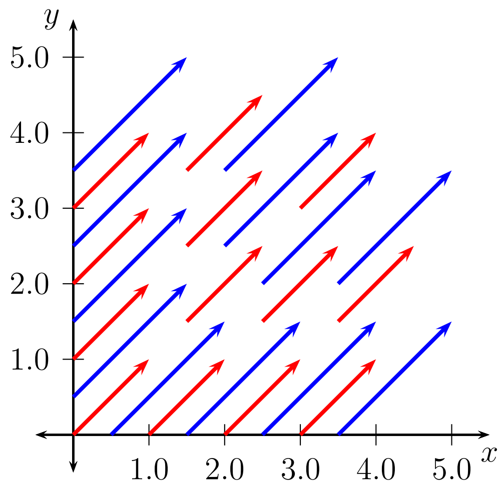


FIGURA 3.2: Vetores equipolentes.

Como represento analiticamente um vetor no plano?

Vamos representar os vetores no plano analiticamente por $\vec{v} = (x, y)$, onde x e y são, respectivamente, a primeira e segunda componentes do vetor $\vec{v}$.

Como represento graficamente um vetor $\vec{v}$=(x, y) ?

A forma mais simples consiste em localizar o ponto P de coordenadas (x, y) no plano cartesiano. Feito isso, ligue a origem do plano ao ponto localizado por um segmento, colocando uma seta no final, como apresentado na figura 3.3.

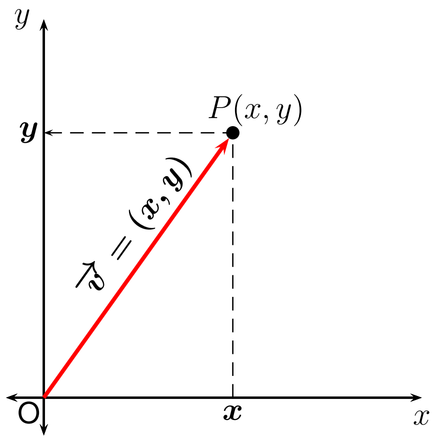


FIGURA 3.3: Representação de vetor no plano.

Um vetor tem sempre seu início na origem ?

Não. Como comentado anteriormente, a forma mais simples é colocar o seu início na origem, mas um vetor pode ser posicionado em qualquer lugar. Normalmente, seu posicionamento com origem em um outro ponto do plano vai depender do problema que estiver sendo trabalhado. Vamos ilustrar isso com dois exemplos:

a) Vamos posicionar o vetor $\overrightarrow{v_1}$=$(-1,3)$ no ponto $P_1(3,1)$ e o vetor $\overrightarrow{v_2}$=$(-3,-1)$ no ponto $P_2(-1,3)$. No caso do primeiro vetor, basta se posicionar no ponto P_1 e andar 1 unidade na direção x no sentido negativo e depois 3 unidades no sentido positivo do eixo y. No caso do segundo ponto, temos que andar a partir do ponto P_2 3 unidades no sentido negativo do eixo x e 1 unidade no sentido negativo do eixo y. A figura 3.4 ilustra a explicação.

b) A figura 3.5 apresenta em vermelho a trajetória de um corpo em lançamento oblíquo. Perceba que a trajetória descreve uma parábola com concavidade voltada para baixo. Note em azul vetores tangentes à parábola. Eles representam os vetores velocidade do corpo em cada ponto apresentado. O tamanho dos vetores dão a medida escalar da velocidade. Os pontos apresentados com os respectivos vetores são dados na tabela abaixo:

Coordenada	Vetor Velocidade
$P_1(0,0)$	$\overrightarrow{v_1}$=$(1,4)$
$P_2(1,3)$	$\overrightarrow{v_2}$=$(1,2)$
$P_3(2,4)$	$\overrightarrow{v_3}$=$(1,0)$
$P_4(3,3)$	$\overrightarrow{v_4}$=$(1,-2)$

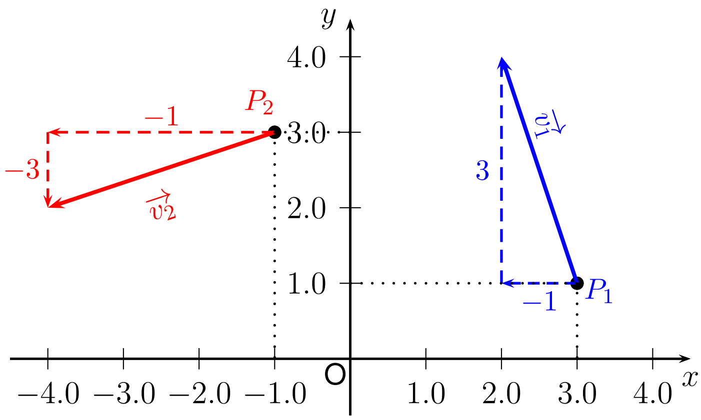


FIGURA 3.4: Exemplo de posicionamento de vetores em pontos do plano.

Que tipo de operações posso realizar com vetores ?

Basicamente duas operações:

- Soma: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$;
- Multiplicação por escalar: $\overrightarrow{w}=\alpha\overrightarrow{u}$.

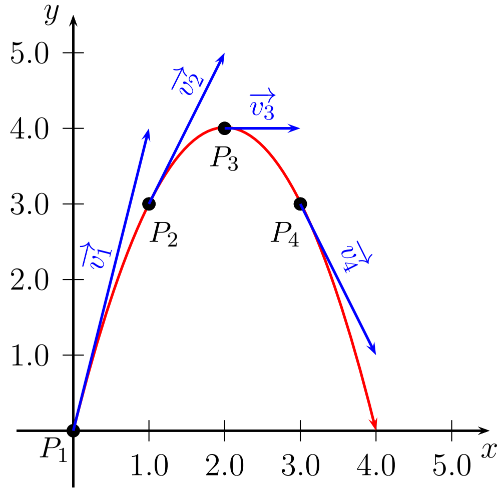


FIGURA 3.5: Vetores tangentes à trajetória de um lançamento oblíquo de um corpo.

Como faço graficamente cada uma das operações anteriormente explicadas ?

Vamos ilustrar isso com exemplos numéricos. Considere o escalar $\alpha = 2$ e os vetores $\overrightarrow{v}=(3,1)$ e $\overrightarrow{u}=(1,3)$. Fazendo as operações, temos:

- Soma: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}=(3,1)+(1,3)=(3+1,1+3)=(4,4)$;
- Multiplicação por escalar: $\overrightarrow{w}=\alpha\overrightarrow{u}= 2(3,1)=(2\times 3, 2\times 1)=(6,2)$.

A figura 3.6 apresenta graficamente os vetores envolvidos na operação de soma, enquanto que a figura 3.7 apresenta o resultado da multiplicação por escalar.

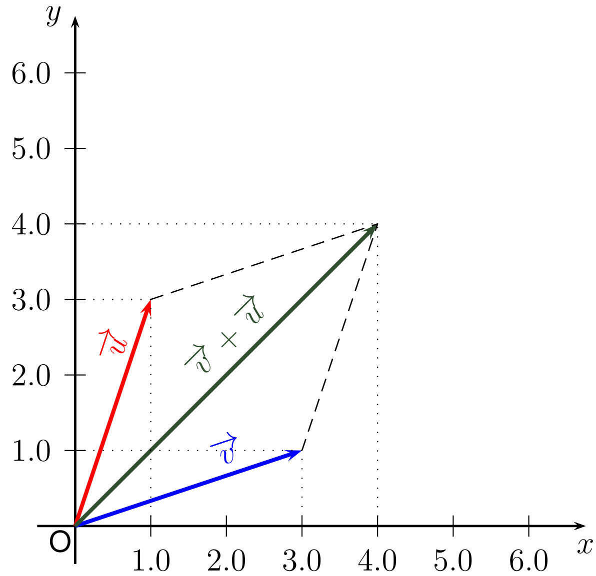


FIGURA 3.6: Exemplo de soma de dois vetores.

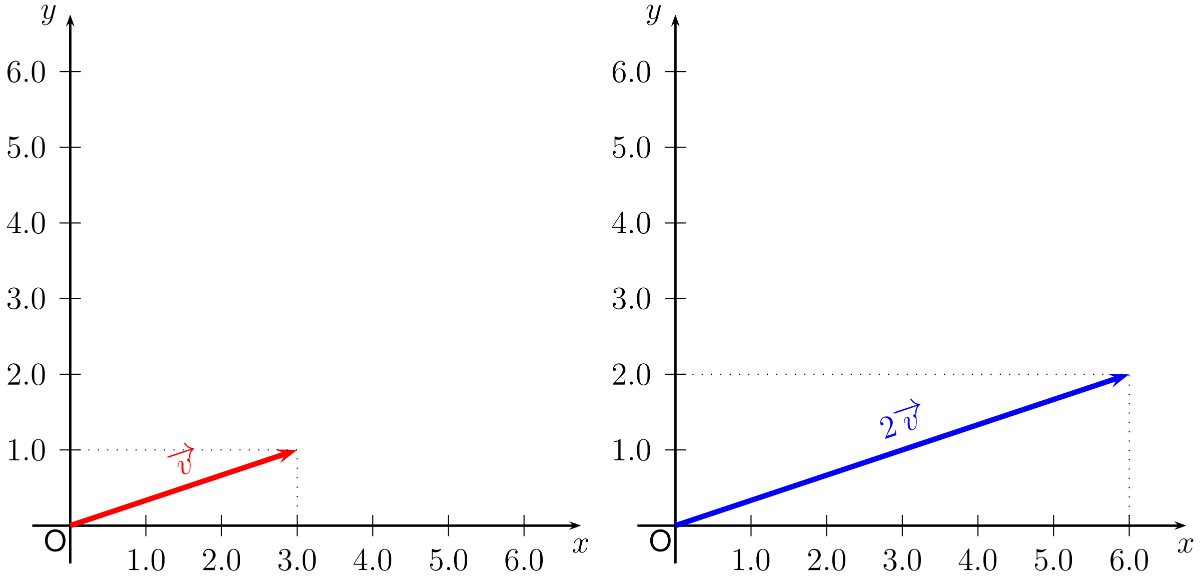


FIGURA 3.7: Exemplo de multiplicação de um vetor por escalar.

Como calculo a diferença entre dois vetores ?

Para fazer essa operação na verdade o que tem que ser feito é a soma de um vetor com o chamado oposto do outro. Por exemplo, para calcular a diferença do vetor $\vec{v}$ com o vetor $\vec{u}$, basta fazer $\vec{v}$+(-$\vec{u}$). Vamos a um exemplo numérico. Considere o cálculo da diferença do vetor $\vec{v}$=$(2, 4)$ com o vetor $\vec{u}$=$(4, -3)$. Calculando, temos

$$\vec{v} + (-\vec{u}) = (2, 4) + (-4, 3) = (2 - 4, 4 + 3) = (-2, 7).$$

Que propriedades os vetores possuem ?

Dados os escalares α e β, e os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, as propriedades são:

i) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

ii) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

iii) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;

iv) $\vec{u}$+(-$\vec{u}$)=$\vec{0}$;

v) $\alpha(\beta\vec{u})$=$(\alpha\beta)\vec{u}$;

vi) $(\alpha+\beta)\vec{u}$=$\alpha\vec{u}$+$\beta\vec{u}$;

vii) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})$=$\alpha\vec{u}$+$\alpha\vec{v}$;

viii) $1\vec{v}=\vec{v}$.

Exercícios

1) Calcule a soma e diferença dos seguintes vetores:

   a) $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (-4, 5)$

   b) $\overrightarrow{u} = (-4, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (5, -1)$

2) Desenhe os vetores do exercício anterior no plano cartesiano, incluindo as somas e as diferenças.

Como posso calcular o ângulo entre dois vetores ?

Considere como ilustração gráfica a figura 3.8. Para calcular o ângulo entre dois vetores, precisamos de duas informações: PRODUTO INTERNO entre os dois vetores e o MÓDULO de cada um deles. O produto interno, também chamado PRODUTO ESCALAR, entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é definido por

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Por exemplo, vamos calcular o produto interno entre os vetor $\overrightarrow{u} = (3, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (-4, 5)$. Calculando, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= \langle (3, -2), (-4, 5) \rangle \\
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= (3) \times (-4) + (-2) \times (5) \\
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= -12 - 10 \\
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= -22
\end{aligned}$$

O módulo (ou comprimento) desse vetor é dado por

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Por exemplo, o módulo do vetor $\overrightarrow{u} = (3, -4)$ é

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{u}| &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \\
|\overrightarrow{u}| &= \sqrt{25} \\
|\overrightarrow{u}| &= 5
\end{aligned}$$

Bom, definido o que é o módulo de um vetor e o que é o produto interno entre dois vetores, podemos partir para o cálculo do ângulo entre dois vetores. Para fazer isso, conforme figura 3.8, é preciso aplicar a Lei dos Cossenos, isto é,

$$|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|cos\theta.$$

Existe uma propriedade dos produtos internos que diz que

$$|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2\langle u, v \rangle.$$

Comparando as duas últimas equações, chegamos ao seguinte resultado

$$\langle u, v \rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|cos\theta.$$

Finalizando, para calcular o ângulo entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ basta isolar θ na última equação, o que resulta em

$$\theta = arccos\left(\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}\right).$$

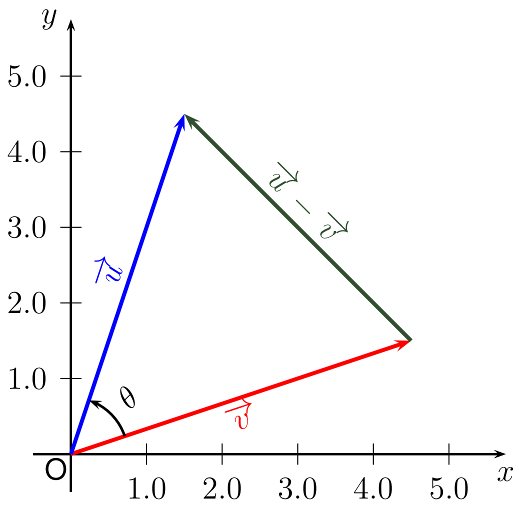


FIGURA 3.8: Ilustração base para o cálculo do ângulo entre dois vetores.

Como posso calcular a projeção ortogonal de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$?

Acompanhe a explicação observando a figura 3.9. A projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ nada mais é do que o vetor $\vec{w}$ cujo módulo tem o comprimento da "sombra" do vetor $\vec{u}$ projetada na direção do vetor $\vec{v}$. Perceba que essa projeção tem que ser proporcional ao vetor v por estar na direção desse vetor. Assim sendo, seja $\vec{w} = \alpha\vec{v}$ o vetor que é a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$. Note que para determinar o vetor $\vec{w}$ é necessário determinar α. Bom, perceba na figura 3.9 que o vetor $\vec{u} - \alpha\vec{v}$ forma um ângulo reto com o vetor $\vec{w}$. Isso significa que o produto interno entre esses dois vetores é igual a zero, pois o $cos(90°) = 0$. Assim sendo, temos que

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\alpha\vec{v}) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Dessa forma, temos então que a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ é dada por

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right)\vec{v}.$$

Por exemplo, vamos determinar a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$=$(1,3)$ sobre o vetor $\vec{v}$=$(4,1)$. O valor de α é dado por

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(1,3) \cdot (4,1)}{(4,1) \cdot (4,1)} = \frac{1 \times 4 + 3 \times 1}{4 \times 4 + 1 \times 1} = \frac{7}{17}.$$

Agora, resta calcular $\vec{w}$, o vetor projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Continuando,

$$\vec{w} = \alpha\vec{v} = \frac{7}{17}(4,1) = \left(\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right).$$

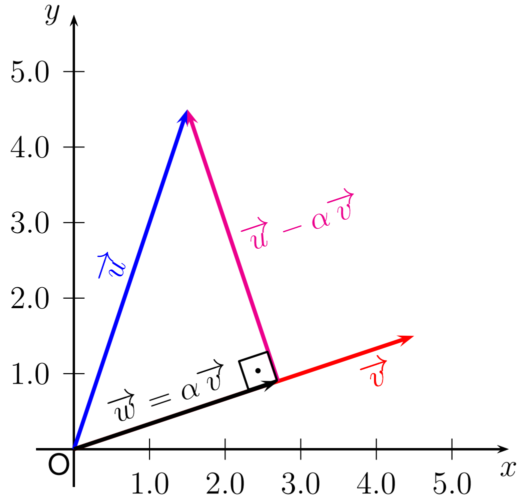


FIGURA 3.9: Projeção ortogonal.

Exercicios

1) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1,4)$ e $\vec{v} = (4,1)$. Utilize nesse exercício uma calculadora científica para obter o ângulo em graus.

2) Calcule a projeção ortogonal do vetor $\vec{u} = (2,3)$ sobre o vetor $\vec{v} = (1,1)$.

Como posso calcular a área de um paralelogramo no plano ?

Acompanhe o desenvolvimento observando a figura 3.10. A área do paralelogramo $ABCD$ pode ser calculada de modo analítico. Tudo o que precisamos são as coordenadas dos pontos A, B

e D. Suponhamos que as coordenadas desses pontos sejam dadas por $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $D(x_D, y_D)$. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores determinados, respectivamente, pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. No caso, temos que

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A) \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD} = D - A = (x_D, y_D) - (x_A, y_A) = (x_D - x_D, y_A - y_A) \end{cases}$$

Na Geometria Euclidiana, temos que a área de um paralelogramo é igual ao comprimento da base multiplicada pela altura. Bom, a medida da base nada mais é do que o módulo do vetor $\overrightarrow{u}$. O que falta é a medida da altura. Observe na figura 3.10 que a medida da altura nada mais é do que a medida do vetor $\overrightarrow{HD}$=$\overrightarrow{u}$-$\overrightarrow{w}$, onde o vetor $\overrightarrow{w}$ nada mais é do que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$. Isso significa que $\overrightarrow{w}$=$\alpha\overrightarrow{v}$. Resumindo, a área do paralelogramo é dada pela fórmula

$$\mathcal{A}_{ABCD} = |\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}| \qquad \text{onde} \qquad \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.$$

Por exemplo, vamos calcular a área do parelogramo determinada pelos vértices $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(6, 4)$ e $D(2, 4)$. Bom, primeiro vamos fazer um gráfico para facilitar o processo de resolução. A própria figura 3.10 apresenta esse gráfico. Seja $\overrightarrow{v}$ o vetor que determina a base. Esse vetor é dado por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= B - A \\ \overrightarrow{v} &= (x_B - x_A, y_B - y_A) \\ \overrightarrow{v} &= (5 - 1, 1 - 1) \\ \overrightarrow{v} &= (4, 0) \end{aligned}$$

Com isso já podemos calcular a medida da base que nada mais é do que o módulo do vetor $\overrightarrow{v}$, o qual é dado por

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4.$$

Falta calcular a medida do vetor $\overrightarrow{u}$-$\alpha\overrightarrow{v}$. Continuando, temos que o vetor $\overrightarrow{u}$ é dado por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= D - A \\ \overrightarrow{u} &= (x_D - x_A, y_D - y_A) \\ \overrightarrow{u} &= (2 - 1, 4 - 1) \\ \overrightarrow{u} &= (1, 3) \end{aligned}$$

Com essa informação, podemos agora calcular α, que é dado por

$$\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{1 \times 4 + 3 \times 0}{4 \times 4 + 0 \times 0} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Para obter $\overrightarrow{u}$-$\alpha\overrightarrow{v}$, segue-se que

$$\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} = (1,3) - \frac{1}{4}(4,0) = (1,3) - (1,0) = (0,3)$$

cujo módulo é dado por

$$|\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3.$$

Pronto, podemos calcular a área do paralelogramo $ABCD$. Sua área é dada por

$$\mathcal{A}_{ABCD} = |\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}| = 3 \times 4 = 12\ u.a.$$

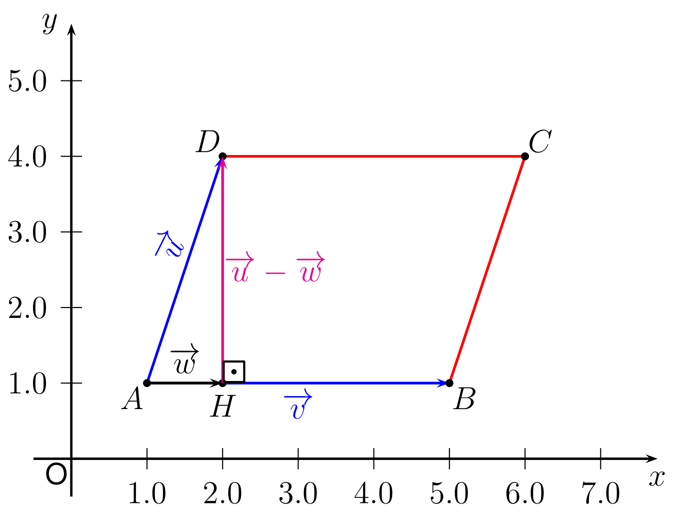


FIGURA 3.10: Área de um paralelogramo.

Como posso calcular a área de um triângulo no plano ?

Nada mais é do que a área do paralelogramo dividido por 2. Basta lembrar da geometria Euclidiana que a área de um triângulo é a medida da base multiplicada pela altura dividida por 2. Note que o processo de obtenção da medida do vetor que determina a base e a medida da altura foi apresentada no processo de determinação da área do paralelogramo. Assim sendo, observando a figura 3.10, considerando o cálculo da área do triângulo ΔABD, a área do triângulo é dada pela fórmula

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{|\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}|}{2} \qquad \text{onde} \qquad \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.$$

Para exemplificar, considere os pontos A, B e D utilizados no cálculo da área do paralelogramo. A área do triângulo ΔABD nada mais é do que a metade da área do paralelogramo, ou seja,

$$\mathcal{A}_{\Delta ABCD} = \frac{|\overrightarrow{v} - \alpha\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6\ u.a.$$

Exercicios

1) Calcule a área do triângulo de vértices $A(1,2)$, $B(-2,4)$ e $C(-4,-2)$.

2) Calcule a área do quadrilátero de vértices $A(3,1)$, $B(-4,2)$, $C(-2,-5)$ e $D(4,4)$.

3) Calcule a área entre o círculo centrado na origem de raio $r = 5$ e o triângulo de vértices $A(-1,-1)$, $B(1,-2)$ e $C(0,1)$.

Nesse módulo trabalhamos com vetores no plano e abordamos vários aspectos e aplicações associados aos mesmos. No próximo módulo iremos fazer o mesmo, só que com vetores no espaço.

Módulo 4
Vetores no Espaço

O que é um vetor no espaço ?

A definição de vetor no espaço é análoga a definição de vetor no plano, já abordada anteriormente. Relembrando, temos que um vetor é um segmento orientado com uma direção, sentido e módulo. A diferença de um vetor no plano para o vetor no espaço é a existência de um terceiro componente. Se $\overrightarrow{v} = (x, y)$ é um vetor no plano, um vetor no espaço é representado por $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$. A figura 4.1 ilustra um vetor no espaço.

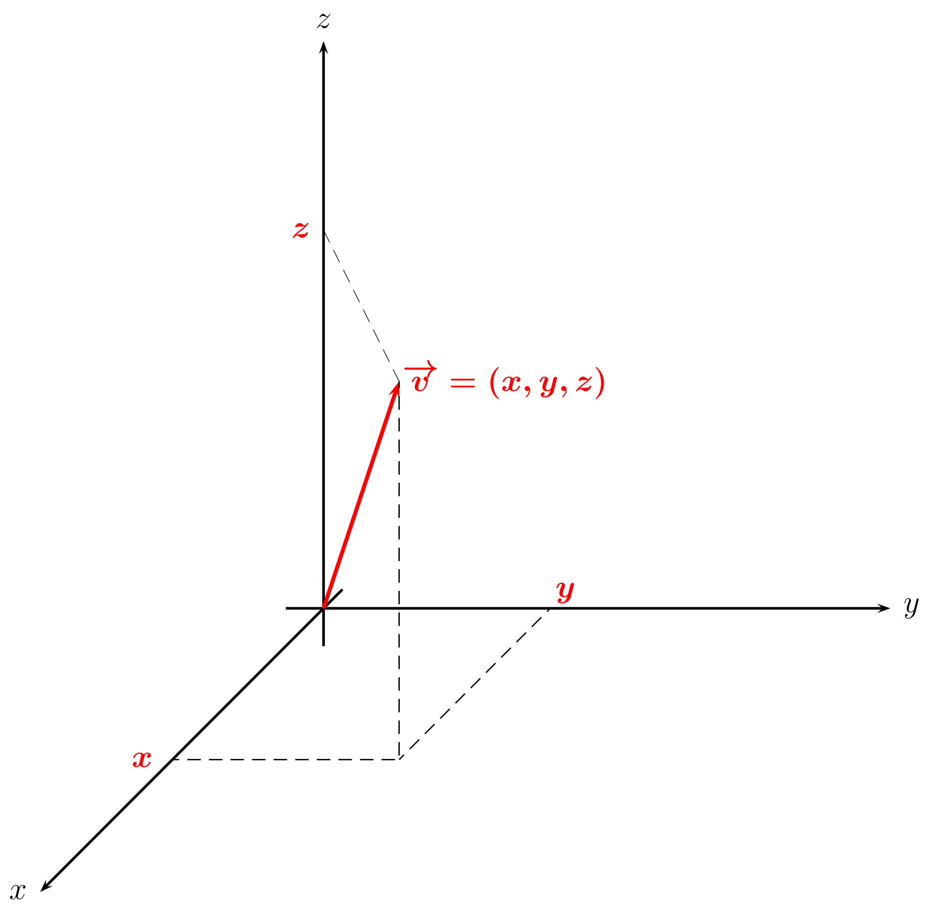


FIGURA 4.1: Vetor no espaço.

Como posso determinar um vetor a partir de dois pontos no espaço ?

Simples. Se $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ são as coordenadas de dois pontos no espaço, um vetor determinado por esses dois pontos pode ser obtido de duas formas:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{v} &= B - A \\
\overrightarrow{v} &= (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) \\
\overrightarrow{v} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)
\end{aligned}$$

Se considerarmos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}$ iremos chegar a $\overrightarrow{v} = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$. Isso significa que a partir de dois pontos podemos obter dois vetores diferentes, ambos com a mesma direção e módulo, porém com sentidos contrários.

Como posso obter o vetor determinado pelos pontos $A(1,3,-5)$ e $B(2,-4,6)$?

Vamos considerar o vetor $\overrightarrow{v_1}$ tal que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\
\overrightarrow{v_1} &= (2 - 1, -4 - 3, 6 + 5) \\
\overrightarrow{v_1} &= (1, -7, 11)
\end{aligned}$$

Considerando agora o vetor $\overrightarrow{v_2}$ tal que $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BA}$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_2} &= (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) \\
\overrightarrow{v_2} &= (1 - 2, 3 + 4, -5 - 6) \\
\overrightarrow{v_2} &= (-1, 7, -11)
\end{aligned}$$

Perceba que ambos têm a mesma direção e módulo, porém têm sentidos contrários. De fato, pois

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{v_1}| &= \sqrt{(1)^2 + (-7)^2 + (11)^2} & \qquad |\overrightarrow{v_2}| &= \sqrt{(-1)^2 + (7)^2 + (-11)^2} \\
|\overrightarrow{v_1}| &= \sqrt{1 + 49 + 121} & \qquad |\overrightarrow{v_2}| &= \sqrt{1 + 49 + 121} \\
|\overrightarrow{v_1}| &= \sqrt{171} & \qquad |\overrightarrow{v_2}| &= \sqrt{171}
\end{aligned}$$

A figura 4.2 apresenta o vetor $\overrightarrow{v_1}$.

Que propriedades os vetores possuem ?

São as mesmas apresentadas para vetores no plano. Vale a soma entre vetores e a multiplicação por um escalar.

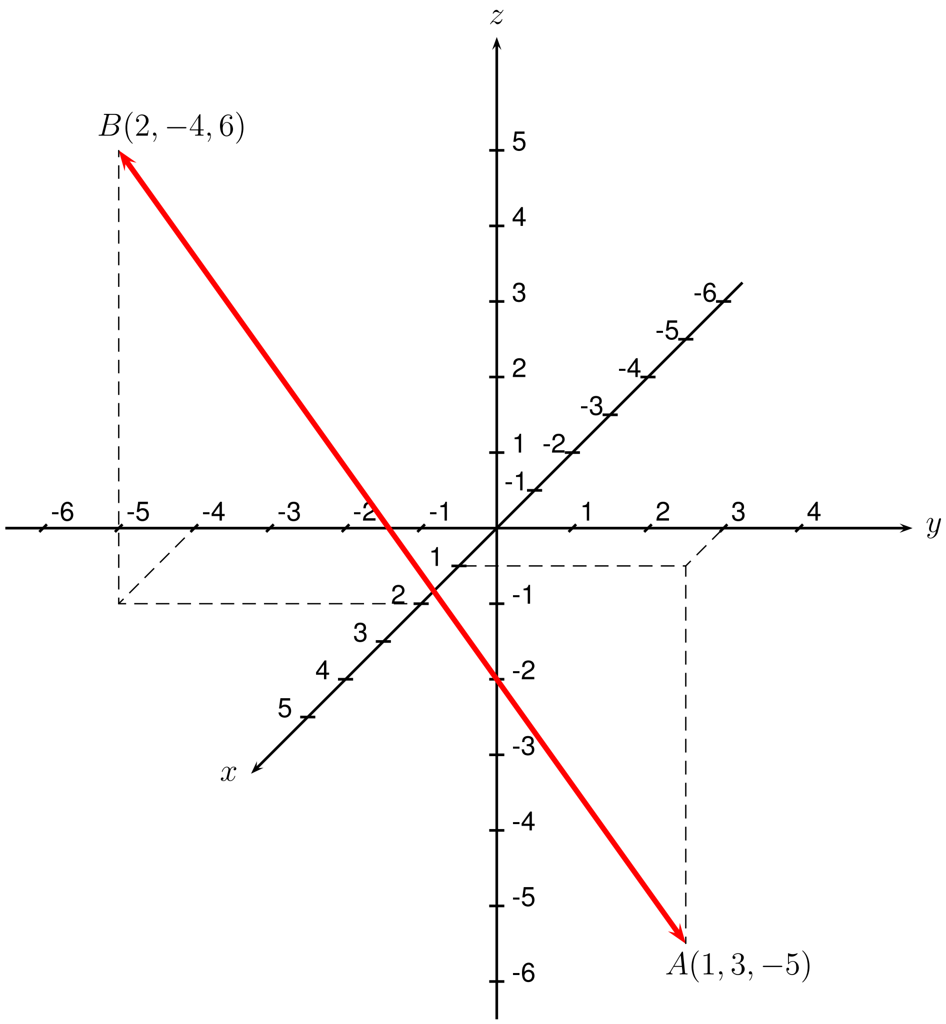


FIGURA 4.2: Exemplo de um vetor determinado por dois pontos no espaço.

Como posso representar uma reta no espaço ?

Existem várias formas, mas vamos abordar aqui apenas duas: A EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA e a AS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA.

Como é a equação vetorial da reta ?

Para obter a equação vetorial da reta, precisamos apenas de duas informações. A primeira informação é um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ por onde ela passa. A segunda informação é o que chamamos de VETOR DIRETOR. Esse vetor diretor é um vetor que define a direção da reta, o qual denotaremos aqui por $\overrightarrow{v_d} = (a, b, c)$. Resumindo, a equação vetorial da reta é dada por

$$r: \ (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

onde t é um valor real qualquer.

Como posso obter a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A(1,-1,1)$ e $B(-3,-2,2)$?

Simples. Precisamos em primeiro lugar de um ponto por onde a reta passe. Essa informação nós já temos pois pode ser tanto o ponto A como o ponto B, uma vez que ambos devem pertencer à reta. O que falta é o vetor diretor $\overrightarrow{v_d}$. Bom, esse vetor diretor pode ser obtido pelo vetor determinado pelo segmento $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$. Assim sendo, vamos considerar $\overrightarrow{v_d}$ como sendo o vetor $\overrightarrow{AB}$. Continuando, segue que

$$\overrightarrow{v_d} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-4,-1,1).$$

Pronto. Considerando o ponto A como sendo o ponto por onde a reta passa, a equação vetorial é dada por

$$r:\ (x,y,z) = (1,-1,1) + t(-4,-1,1),$$

ou considerando o ponto B, temos que

$$r:\ (x,y,z) = (-3,-2,2) + t(-4,-1,1).$$

É importante ressaltar que as duas equações vetoriais representam a mesma reta. A reta em questão é apresentada na figura 4.3.

Como são as equações paramétricas da reta ?

As equações paramétricas de uma reta são obtidas a partir da equação vetorial. Assim sendo, se

$$r:\ (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$$

é a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$, as chamadas equações paramétricas são obtidas como se segue abaixo

$$\begin{array}{l} r:\ (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c) \\ r:\ (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + (at,bt,ct) \\ r:\ (x,y,z) = (x_0+at, y_0+bt, z_0+ct) \end{array} \Rightarrow r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Esse último conjunto de equações são as equações paramétricas da reta, sendo a variável t o parâmetro. Se considerarmos a equação vetorial da reta do último exemplo, temos pelo menos duas formas parâmetricas possíveis

$$r: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{ou} \quad r: \begin{cases} x = -3 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

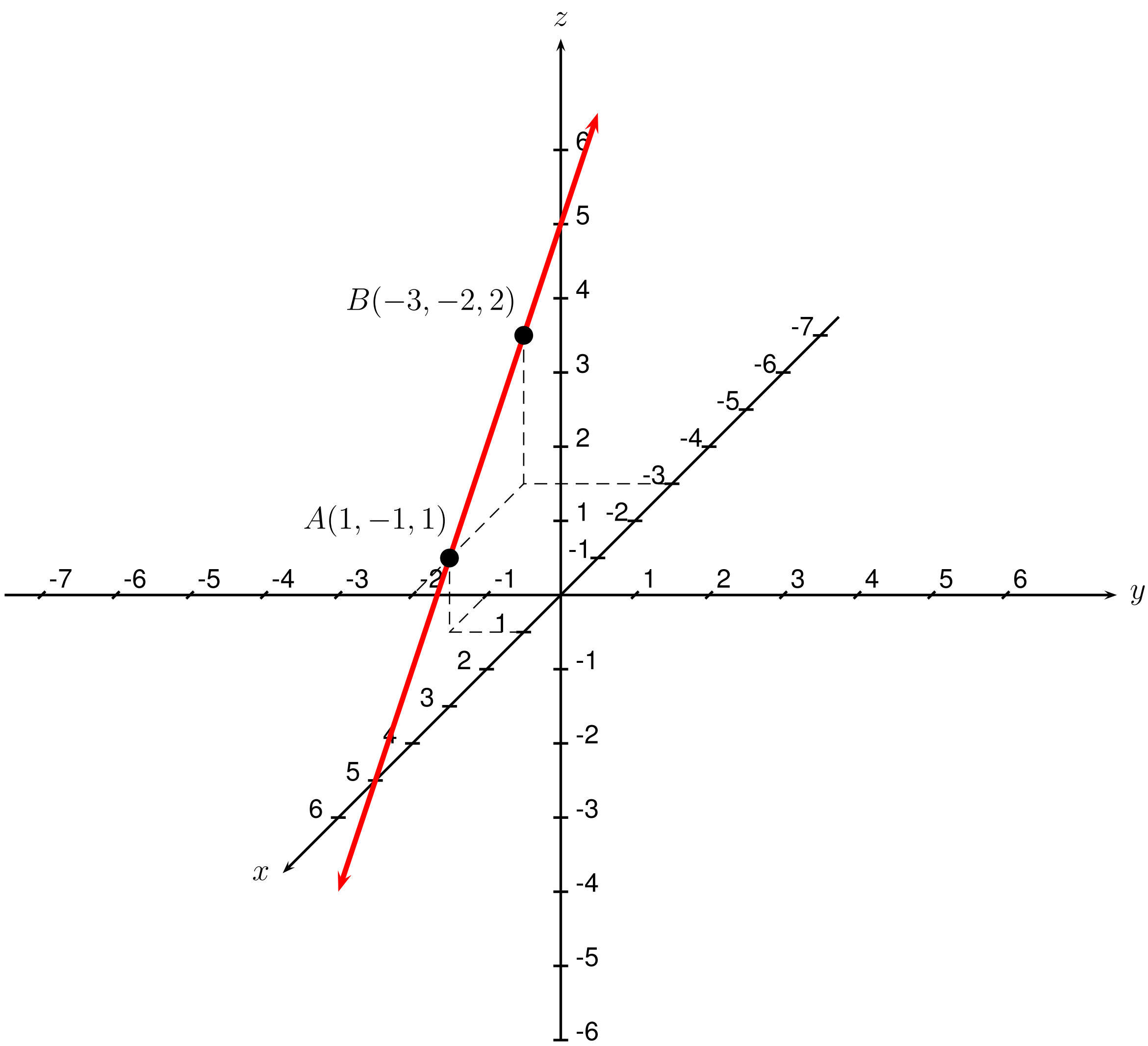


FIGURA 4.3: Exemplo de uma reta determinada por dois pontos no espaço.

Como posso verificar se um ponto pertence ou não a uma reta ?

De posse da equação vetorial ou paramétrica de uma reta, temos que cada valor de t determina um único ponto que pertence à reta, o qual deve ser único. Assim sendo, dado um ponto $P(x_0, y_0)$, para saber se o mesmo pertence a uma dada reta, basta verificar se existe um único t que o determina. Se existir, o ponto perternce. Caso contrário, não. Para exemplificar, vamos verificar se os pontos $P_1(-7,-3,3)$ e $P_2(1,2,0)$ pertencem à reta dada pelas equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Para $P_1(-7,-3,3)$ temos que

$$r: \begin{cases} -7 = -3 - 4t \\ -3 = -2 - t \\ 3 = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 + 3 = -4t \\ -3 + 2 = -t \\ 3 - 2 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Veja, temos $t = 1$ para todas as três equações. Segue então que o ponto $P_1(-7,-3,3)$ pertence à reta r. Vamos agora fazer a verificação para o ponto $P_2(1,2,0)$.

$$r: \begin{cases} 1 = -3 - 4t \\ 2 = -2 - t \\ 0 = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 3 = -4t \\ 2 + 2 = -t \\ 0 - 2 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -4 \\ t = -2 \end{cases}$$

No que para cada equação o valor de t é diferente. Isso significa que o ponto $P_2(1,2,0)$ não pertence à reta.

Exercicios

1) Determine as equações vetoriais e paramétricas das retas que passam pelos pontos:

   a) $A(1,2,3)$ e $B(5,-4,1)$;

   b) $A(3,1,0)$ e $B(-4,-2,0)$;

2) Verifique se o ponto $P_1(3,-1,2)$ e $P_2(3,0,4)$ pertence à reta do item (a) do exercício anterior.

Como é definida a equação de um plano ?

Vamos abordar uma das formas de representar a equação de um plano: FORMA PARAMÉTRICA.

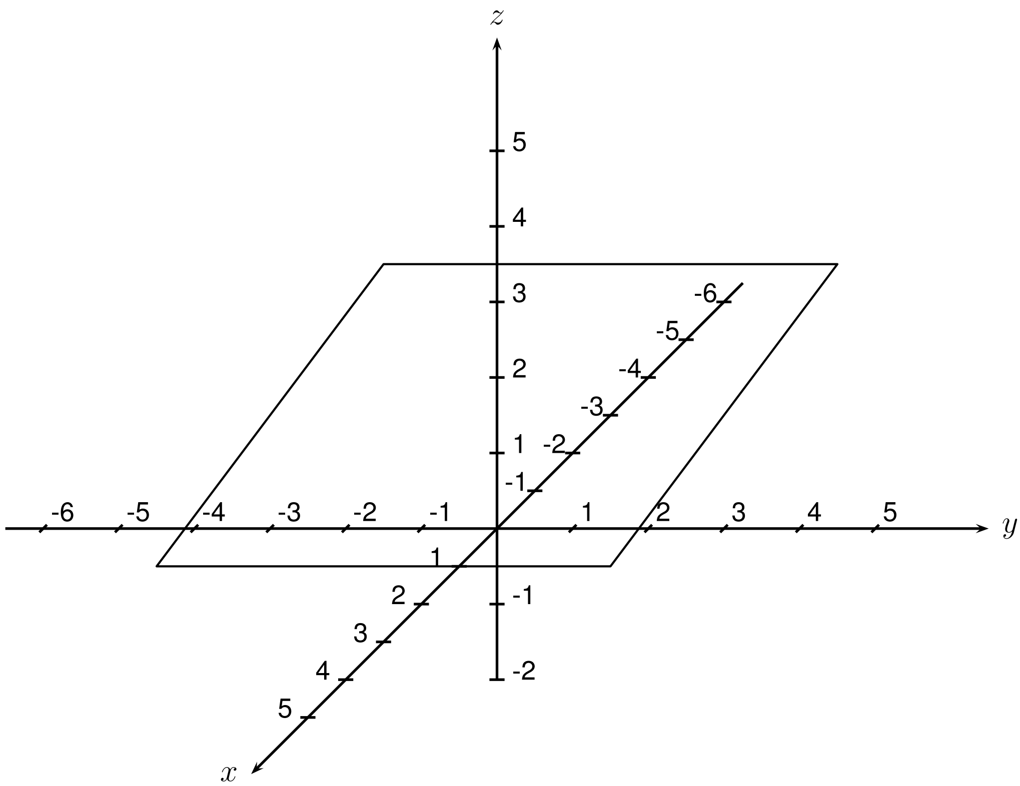


FIGURA 4.4: Exemplo de um plano.

Como é a forma paramétrica de um plano ?

Para definir a forma paramétrica de um plano α temos que definir antes alguns conceitos: VETORES NÃO COLINEARES e VETORES NORMAIS.

O que são vetores colineares ?

Um vetor $\overrightarrow{v_1}$ é colinear a um outro vetor $\overrightarrow{v_2}$ se existe um número real k tal que $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$. Se isso não ocorre, dizemos que os vetores não são colineares. Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{v_1} = (4, 2, 6)$ é colinear ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, 3)$ pois $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{v_2}$. Já os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (0, -3, 4)$ não são colineares. Entenda, quando um vetor é colinear a outro existe uma proporção entre eles, entre cada componente dos vetores.

O que são vetores normais ?

Dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são normais se $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0$, ou seja, são perpendiculares. Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 2)$ é normal ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (-2, 4, 1)$, pois

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \langle (1,0,2), (-2,4,1) \rangle = (1) \times (-2) + (0) \times (4) + (2) \times (1) = 0.$$

Como são definidas as equações paramétricas de um plano ?

Para definir, as equações paramétricas de um plano α, precisamos de um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e dois vetores não colineares $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$ que sejam paralelos ao referido plano (veja figura 4.5). Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \alpha:\ (x,y,z) &= (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \\ \alpha:\ (x,y,z) &= (x_0 + a_1 s + a_2 t, y_0 + b_1 s + b_2 t, z_0 + c_1 s + c_2 t) \end{aligned}$$

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t \end{cases}$$

Por exemplo, vamos obter as equações paramétricas do plano α determinadas pelo ponto $P(1, -2, 3)$ e pelos vetores não colineares $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$ e $\overrightarrow{u} = (1, 3, -4)$. Continuando, temos que

$$\alpha: \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = -2 - s + 3t \\ z = 3 + s - 4t \end{cases}$$

É importante que o aluno perceba que todo plano é definido em essência por dois vetores não colineares, e que todo ponto é obtido pela combinação linear que envolve um ponto que pertença ao plano mais dois vetores diretores desse plano. Um fato interessante que será apresentado mais à frente é que o chamado produto vetorial entre dois vetores não colineares produz um outro vetor que é ortogonal ao plano definido pelos primeiros dois vetores.

Como posso determinar as equações paramétricas de um plano a partir de três pontos não colineares ?

Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$ três pontos contidos em um plano α. O que precisamos obter nesse momento para determinar as equações paramétricas são dois vetores

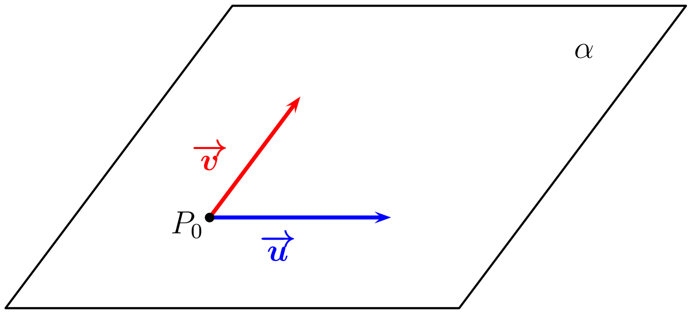


FIGURA 4.5: Dados para se obter as equações paramétrica de um plano.

que sejam paralelos ao plano α. Basta para isso tomar $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Fazendo as contas, segue que

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) \end{cases}$$

Tomando o ponto A como o ponto de referência P_0, temos então as equações paramétricas do plano que contêm os pontos A, B e C e são dadas por

$$\alpha : \begin{cases} x &= x_A + (x_B - x_A)s + (x_C - x_A)t \\ y &= y_A - (y_B - y_A)s + (y_C - y_A)t \\ z &= z_A + (z_B - z_A)s + (z_C - z_A)t \end{cases}$$

Anteriormente foi explicado o que são vetores normais. Esses vetores têm alguma utilidade para determinação de planos ?

Sim. Observe a figura 4.6. Se tivermos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pertencente a um plano α e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ que seja normal ao plano α em todas as direções, então podemos obter um tipo de equação para o plano. Assim sendo, seja $P(x, y, z)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dois pontos distintos pertencentes a um plano α, e $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor normal a esse plano em todas as direções. Se $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P}$ é um vetor paralelo ao plano α e $\vec{v}$ é um vetor normal ao mesmo, então segue que

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$$
$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{PP_0} \rangle = 0$$
$$\langle \overrightarrow{v}, P - P_0 \rangle = 0$$
$$\langle (a, b, c), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$
$$ax + by + cz + d = 0$$

onde essa última equação é chamada EQUAÇÃO GERAL DO PLANO, sendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Perceba que os coeficientes de x, y e z na equação geral de um plano são componentes do vetor normal ao mesmo. Por exemplo, um plano α com equação geral $2x - 3y + 5z + 1 = 0$ tem um vetor normal dado por $\overrightarrow{v} = (2, -3, 5)$.

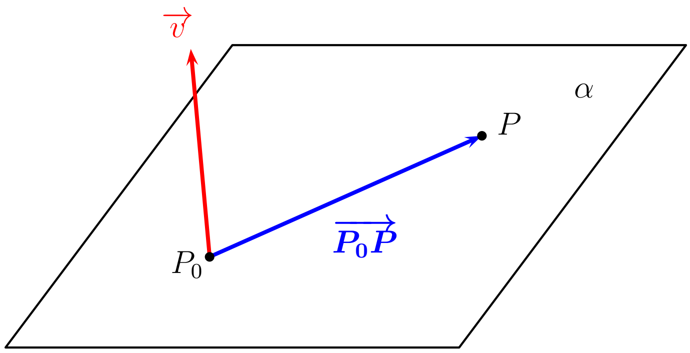


FIGURA 4.6: Vetor normal ao plano α.

Se $\overrightarrow{v} = (-1, 2, -5)$ é um vetor normal a um plano α e contém o ponto $A(2, -1, 3)$, qual é a equação geral desse plano ?

Observando o vetor normal ao plano α já temos os coeficientes de x, y e z na equação. Com isso, segue-se que
$$-x + 2y - 5z + d = 0.$$

O que falta agora é determinar o valor de d. Se o ponto $A(2, -1, 3)$ pertence ao plano α então ao substituir as coordenadas desse ponto na equação a mesma terá que ser satisfeita. Assim sendo, segue-se que

$$-x + 2y - 5z + d = 0 \Rightarrow -(2) + 2 \times (-1) - 5 \times (3) + d = 0 \Rightarrow d = 19.$$

Portanto, a equação do plano em questão é dada por $-x + 2y - 5z + 19 = 0$.

A partir de dois vetores não colineares é possível obter um vetor que seja normal aos dois primeiros ?

Sim. A chave para isso é o chamada PRODUTO VETORIAL. O produto vetorial entre um vetor $\overrightarrow{u}$=(a_1, b_1, c_1) e um $\overrightarrow{v}$=(a_2, b_2, c_2), simbolizado por $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, irá gerar um vetor $\overrightarrow{w}$ tal que $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ e $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$. O produto vetorial desses vetores é calculado utilizando-se o determinante apresentado abaixo

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

onde $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. A figura 4.7 ilustra o produto vetorial entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

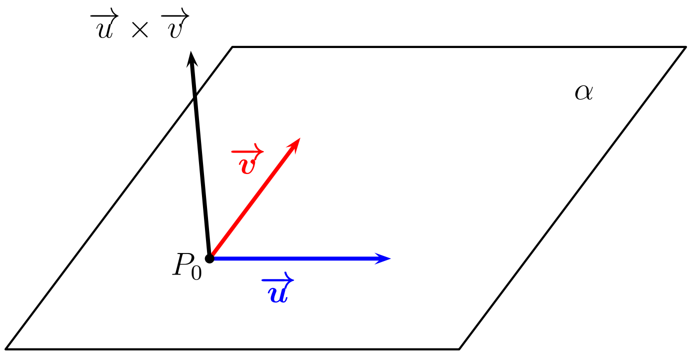


FIGURA 4.7: Produto vetorial entre dois vetores.

Calcule então o produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (-1, 1, -3)$.

Vamos lá. Montando a matriz, temos que

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -6\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} + 2\overrightarrow{k} - \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -7\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -7(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-7, 2, 3).$$

O produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{w}$=$(-7, 2, 3)$.

Observei anteriormente que para determinar a equação de um plano basta ter conhecimento de três pontos não colineares que estejam contidos no mesmo. A pergunta é: Utilizando esses mesmos três pontos, é possível obter um vetor normal ao referido plano ?

Sim. A chave para isso está no produto vetorial. Vamos elucidar isso. Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$ três pontos não colineares contidos em um plano α. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Daí, temos que

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (a_1, b_1, c_1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$$

Como já visto anteriormente, o produto vetorial de dois vetores resulta em outro vetor que é simultaneamente normal aos dois primeiros. Isso significa que o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ irá gerar um vetor normal aos mesmos. Calculando o produto interno entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos que

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_3, b_3, c_3).$$

O vetor $\vec{w}$=(a_3, b_3, c_3) é o produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. As componentes do vetor $\vec{w}$ são os coeficientes de x, y e z da equação geral do plano α, isto é,

$$a_3x + b_3y + c_3z + d = 0.$$

Fica faltando determinar d na equação. Para isso, basta jogar as coordenadas de um dos pontos A, B ou C na equação geral acima para obter d e, portanto, a equação geral do plano.

Exercícios

1) Determine as equações paramétricas definidas pelos pontos:

a) $A(1, 2, 3)$, $B(3, -4, 1)$ e $C(1, -2, 2)$

b) $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 4, 0)$ e $C(-1, 2, -4)$

c) $A(-4, 0, 3)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, -1)$

2) Calcule o produto vetorial entre cada par de vetores a seguir:

a) $\overrightarrow{u} = (1, 4, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 2, -1)$

b) $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (0, -2, 0)$

c) $\overrightarrow{u} = (3, 1, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (-2, -4, -6)$

3) Mostre que o produto vetorial $\vec{w}$, obtido em cada item do exercício anterior, é normal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ utilizados para gerar o referido vetor $\vec{w}$.

4) Determine a equação geral do plano determinado pelos pontos

$$A(-1,2,4), B(0,1,1) \quad e \quad C(-2,0,-3)$$

Que tipo de posição relativa pode ocorrer entre duas retas ?

Elas podem ser coplanares, isto é, situadas no mesmo plano, ou reversas. Se forem coplanares, temos duas situações possíveis: São retas CONCORRENTES caso se interceptam em um ponto, isto é, $r \bigcap s = P$, e são PARALELAS caso não se interceptem em nenhum ponto (veja figura 4.8). São chamadas retas REVERSAS se as retas não estão situadas no mesmo plano.

Como posso saber se duas retas são coplanares ?

Isso pode ser verificado utilizando o chamado PRODUTO MISTO. Para entender o que é o produto misto, acompanhe o desenvolvimento a seguir. Seja r uma reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e tem vetor diretor $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$. Seja s uma reta que passa pelo ponto $B(x_B, y_B, z_B)$ e tem vetor diretor $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. O produto misto associado às retas r e s, simbolizado por

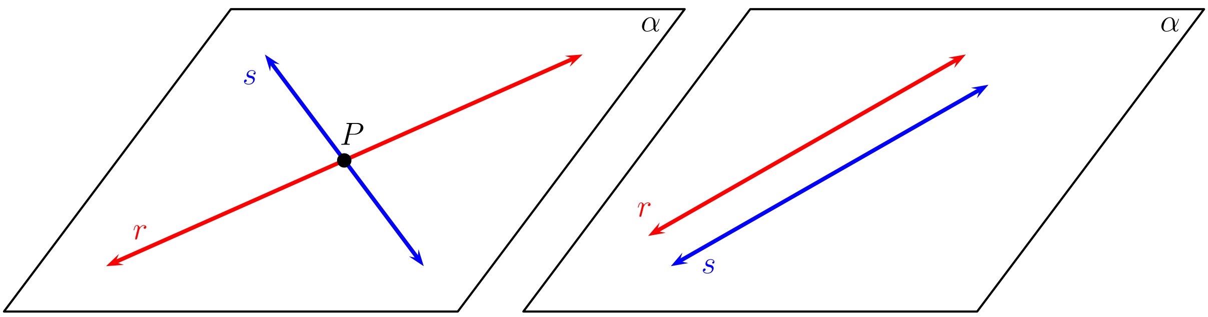


FIGURA 4.8: Retas concorrentes e paralelas.

$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB} \rangle$, é o valor do determinante

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix}$$

As retas r e s são coplanares se o produto misto for nulo, isto é, se $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$. Para exemplificar, considere as retas r e s a seguir:

$$\begin{cases} r: \ (x, y, z) = (2, 0, 5) + t(2, 3, 4) \\ s: \ (x, y, z) = (-5, -3, 6) + t(-1, 1, 3) \end{cases}$$

Vamos calcular o produto misto associado às retas r e s. Observando as equações vetoriais podemos notar que a reta r passa pelo ponto $A(2, 0, 5)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (2, 3, 4)$, enquanto que no caso da reta s, temos que ela passa pelo ponto $B(-5, -3, 6)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (-1, 1, 3)$. Calculando o produto misto, temos que

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5-2 & -3-0 & 6-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como o produto misto é nulo, temos que a reta r e s são coplanares.

Como posso calcular a distância entre um ponto e uma reta no espaço ?

Seja r a reta que passa pelo ponto $P(x_1, y_1, z_1)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$, e $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do espaço que não pertence a reta r. A área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_0}$ é dada pela fórmula

$$A = |\overrightarrow{v}| d$$

onde d é a altura do paralelogramo. O valor de d acaba sendo também a distância do ponto P_0 à reta r. Como já foi mostrado anteriormente, a área do paralelogramo também pode ser calculada via produto vetorial, sendo sua fórmula dada por

$$A = |\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|.$$

Igualando as expressões apresentadas, temos que

$$|\overrightarrow{v}|d = |\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}| \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

Portanto, a distância entre o ponto P_0 e a reta r é dada pela fórmula

$$d_{P_0r} = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

Para exemplificar, vamos calcular a distância do ponto $P_0(1,2,0)$ até a reta r de equação vetorial

$$r: \ (x,y,z) = (1,1,2) + t(-1,2,-4).$$

Bom, da equação da reta temos que $P_1(1,1,2)$ e o seu vetor diretor é $\overrightarrow{v} = (-1,2,-4)$. Precisamos então obter o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ e calcular o módulo do produto vetorial $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}$. e do vetor $\overrightarrow{v}$. Continuando, temos que

$$\overrightarrow{P_1P_0} = P_0 - P_1 = (1,2,0) - (1,1,2) = (0,1,-2).$$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = (0,-2,-1).$$

$$|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}| = |(0,-2,-1)| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{v}| = |(-1,2,-4)| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

Usando agora a fórmula, temos que

$$d_{P_0r} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = \frac{21\sqrt{5}}{21} \ u.c.$$

Como posso calcular a distância entre duas retas concorrentes ?

Bom, a distância entre duas retas concorrentes é nula por definição.

Como posso calcular a distância entre duas retas paralelas ?

Nesse caso, basta tomar um ponto qualquer de uma das retas e calcular a distância desse a outra reta. Por exemplo, vamos calcular a distância entre as retas paralelas r e s dadas por

$$\begin{cases} r: \ (x,y,z) = (1,0,3) + t(2,-2,4) \\ s: \ (x,y,z) = (1,0,5) + t(1,-1,2) \end{cases}$$

As retas de fato são paralelas pois um vetor diretor é um múltiplo do outro. Vamos tomar $P_1(1,0,5)$ (um ponto da reta s), $P_0(1,0,3)$ (um ponto da reta r) e $\overrightarrow{v} = (1,-1,2)$. Entenda, o que vai ser feito aqui é o cálculo da distância do ponto P_0 que está na reta r até a reta s. Isso vai fornecer no final a distância entre as retas paralelas r e s. Continuando,

$$\left\{ \overrightarrow{P_1P_0} = P_1 - P_0 = (1,0,5) - (1,0,3) = (0,0,2) \right.$$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} = (-2,-2,0).$$

$$\begin{cases} |\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}| = |(-2,-2,0)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{v}| = |(1,-1,2)| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6} \end{cases}$$

Usando a fórmula de distância de ponto a reta para calcular a distância entre as retas r e s temos que

$$d_{rs} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ u.c.$$

Como posso calcular a distância entre duas retas reversas ?

Sejam r e s duas retas reversas cujas equações vetoriais são dadas por

$$\begin{cases} r: \ (x,y,z) = \overbrace{(x_A, y_A, z_A)}^{A} + t\,\overbrace{(a_1, b_1, c_1)}^{v} \\ s: \ (x,y,z) = \underbrace{(x_B, y_B, z_B)}_{B} + t\,\underbrace{(a_2, b_2, c_2)}_{u} \end{cases}$$

A distância entre as retas reversas r e s é dada por

$$d_{rs} = \frac{|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AB} \rangle|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|}.$$

Para exemplificar, vamos calcular a distância entre as retas r e s, que são reversas, e cujas equações são dadas por

$$\begin{cases} r: \ (x,y,z) = \overbrace{(3,-1,3)}^{A} + t\,\overbrace{(0,2,-1)}^{v} \\ s: \ (x,y,z) = \underbrace{(-2,1,4)}_{B} + t\,\underbrace{(1,0,-2)}_{u} \end{cases}$$

Vamos calcular o produto misto

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4,1,2).$$

Calculando a distância,

$$d_{rs} = \frac{|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AB} \rangle|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|} = \frac{|16|}{|(4,1,2)|} = \frac{16}{\sqrt{16+1+4}} = \frac{16}{\sqrt{21}} = \frac{16\sqrt{21}}{21}\ u.c.$$

Como posso calcular a distância de um ponto a um plano ?

Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do espaço e α um plano de equação geral dada por

$$ax + by + cz + d = 0.$$

A fórmula que permite calcular a distância do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ao plano α é dada por

$$d_{P_0\alpha} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Para exemplificar, vamos calcular a distância do plano $P(1,2,0)$ ao plano α de equação geral $2x + 3y - 4z + 1 = 0$. Bom, do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nos já temos as coordenadas, isto é, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ e $z_0 = 0$. Da equação geral dada temos que $a = 2$, $b = 3$ e $c = -4$. Substituindo essas informações na fórmula, segue que

$$d_{P_0\alpha} = \frac{|2(1) + 3(2) - 4(0) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-4)^2}} = \frac{9}{\sqrt{29}} = \frac{9\sqrt{29}}{29}\ u.c.$$

Como posso calcular a distância entre dois planos ?

No que tange esse assunto, só se calcula a distância entre dois planos se os mesmos forem paralelos. Nesse caso, basta tomar um ponto que pertence a um plano e calcular a distância desse ponto ao outro plano. Para exemplificar, vamos calcular a distância entre os planos

$$\begin{cases} \alpha: \ x - 2y + z + 1 = 0 \\ \beta: \ -2x + 4y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Vamos pegar um ponto do plano α. Para fazer isso, vamos atribuir um valor para x e y na equação do plano α. Com isso, teremos uma equação cuja única variável é a variável z. Resolvendo essa equação iremos obter o valor de z. Pronto, temos as coordenadas de um ponto que pertence ao plano α. Agora basta calcular a distância desse ponto ao plano β. Bom, o roteiro foi apresentado. Vamos aplicá-lo. Tomemos $x = 0$ e $y = 0$. Jogando esses valores na equação do plano α iremos obter no final $z = -1$. Temos então o ponto $P_0(0, 0, -1)$ que pertence ao plano α. Resta calcular a distância desse ponto ao plano β utilizando a fórmula para calcular a distância entre um ponto e um plano já apresentado anteriormente. Continuando,

$$d_{P_0\beta} = \frac{|-2(0) + 4(0) - 2(-1) + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-2)^2}}$$

$$d_{P_0\beta} = \frac{4}{2\sqrt{6}}$$

$$d_{P_0\beta} = \frac{\sqrt{6}}{3} \ u.c.$$

Como posso calcular o volume de um paralelepípedo ?

Considere que três das arestas que determinam o paralelepípedo formem três vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. O volume do paralelepípedo é dado pelo módulo do produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ou seja,

$$V = |\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|$$

Para exemplificar, calcule o volume do paralelepípedo cujas arestas são determinadas pelos vetores $\overrightarrow{u} = (1, 4, 0)$, $\overrightarrow{v} = (-2, 2, 0)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 2, 4)$. Calculando o produto misto, temos que

$$V = |\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 40 \ u.v.$$

Exercícios

1) Podemos afirmar que as retas

$$\begin{cases} r: \ (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -1, 1) \\ s: \ (x, y, z) = (-2, 1, -4) + t(-2, 4, 3) \end{cases}$$

são coplanares ? Justifique suas resposta.

2) Determine a equação geral e as equações paramétricas do plano determinado pelos pontos $A(1,3,5)$, $B(-1,-2,5)$ e $C(-2,-2,-5)$.

3) Calcule a distância do ponto $P(1, 0, -4)$ até o plano determinado pelos pontos $A(1, -5, 3)$, $B(-2, -1, 5)$ e $C(-5, -2, 2)$.

4) Calcule a distância entre as retas

a) $\begin{cases} r: \ (x,y,z) = (3,1,-4) + t(-1,2,1) \\ s: \ (x,y,z) = (-4,1,2) + t(1,-3,4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: \ (x,y,z) = (3,1,-4) + t(-1,2,1) \\ s: \ (x,y,z) = (-4,1,2) + t(3,-6,-3) \end{cases}$

5) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, -2, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (-4, 1, 1)$.

6) Determine as coordenadas do ponto de intersecção das retas

$$\begin{cases} r: \ (x,y,z) = (3,1,-4) + t(-1,2,1) \\ s: \ (x,y,z) = (-4,1,2) + t(1,0,1) \end{cases}$$

Exercícios de Revisão

1) O que é um vetor ?

2) Como é feito o cálculo do módulo de um vetor ?

3) Quando é que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ? Dê um exemplo.

4) Como é calculado o produto interno entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Dê um exemplo.

5) Como é calculado o produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Dê um exemplo.

6) Se $\vec{w}$ é o produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o que podemos afirmar do produto interno entre o vetor $\vec{w}$ e o vetor $\vec{u}$? E do produto interno do vetor $\vec{w}$ com o vetor $\vec{v}$? Dê exemplos.

7) A equação de uma reta no espaço pode ser representada de quantas formas ? Exemplifique cada forma.

8) A equação de um plano no espaço pode ser representada de quantas formas ? Exemplifique cada forma.

Com esse módulo finalizamos a disciplina. Espero que tenham assimilado bem as bases fundamentais da Geometria Analítica, pois elas serão utilizadas em outras disciplinas do curso. Desejo muito sucesso a todos nas próximas disciplinas.

Referências Bibliográficas

[1] A.Steinbruch e P.Winterle: *Geometria Analítica*. Pearson Makron Books, 2ª edição, 1987.

[2] E.L.Lima: *Coordenadas no Plano*. SBM, 5ª edição, 2005.

[3] E.L.Lima: *Coordenadas no Espaço*. SBM, 3ª edição, 1998.

[4] I.Camargo e P.Boulos: *Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial*. Pearson Makron Books, 3ª edição, 2005.